# Cópulas definidas a partir de funciones de implicación borrosas

S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens

Departamento de Ciencias Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears
Carretera de Valldemossa, km 7.5, 07122 Palma
{s.massanet,daniel.ruiz,jts224}@uib.es

**Resumen** Las cópulas han sido investigadas en profundidad por sus aplicaciones en muchos campos. Desde el punto de vista teórico, un tema importante consiste en la búsqueda de nuevos métodos de construcción de familias parametrizadas de cópulas. Este artículo presenta métodos de construcción de cópulas basados en funciones de implicación borrosas. Las ideas surgen a partir de artículos recientes de P. Grzegorzewski, donde se introdujeron algunos métodos de construcción de funciones de implicación a partir de cópulas.

**Palabras clave:** Función de implicación borrosa, cópula, t-conorma, cópula de supervivencia

## 1. Introducción

Las funciones de agregación y las funciones de implicación borrosas son dos tipos de operadores muy relacionados entre si y, de hecho, hay muchos trabajos publicados orientados a estudiar dichas relaciones (véase [3,15] y sus referencias). En particular, muchos autores han investigado métodos para construir funciones de implicación borrosas a partir de funciones de agregación y viceversa. Como un ejemplo muy conocido de estos métodos destaca la familia de las *implicaciones residuales* o $R$-implicaciones. Éste fue uno de los primeros métodos para obtener implicaciones a partir de conjunciones y sus residuos, y de hecho, otras clases de conjunciones se han usado en esta línea. Principalmente, t-normas continuas por la izquierda [15], uninormas conjuntivas continuas por la izquierda (apareciendo las también llamadas $RU$-implicaciones) [1,6], pero también semi-cópulas y cópulas [8] y muchos otros tipos de funciones de agregación conjuntivas (véase [17] y sus referencias). En la mayor parte de estos casos, es posible también construir la conjunción inicial a partir de la implicación residual correspondiente.

Otro método de construcción es el de las *implicaciones materiales*. En este caso, dada una negación $N$ es posible construir una función de implicación a partir de una t-conorma $S$, obteniendo las conocidas $(S, N)$-implicaciones, y viceversa [3,4]. De nuevo, se puede usar una uninorma disyuntiva en lugar de una t-conorma (obteniendo las llamadas $(U, N)$-implicaciones) [5], y también muchos otros tipos de funciones de agregación disyuntivas (véase [17] y sus referencias).

Además, como se ha dicho anteriormente, el proceso se puede hacer en ambas direcciones, desde disyunciones a implicaciones y viceversa.

Recientemente, algunas estrategias diferentes de obtención de funciones de implicación a partir de cópulas han sido propuestas en [7,10,11,12,13] y se han estudiado algunas de sus propiedades en [2]. El punto en común de dichos artículos es la búsqueda de un tipo de implicación que "*tenga en cuenta las imprecisiones modeladas por los conceptos borrosos, así como la aleatoriedad descrita por las herramientas generadas a partir de la teoría de la probabilidad*" [10]. Intentando dar una respuesta adecuada a este problema, han aparecido las *implicaciones probabilísticas*, las *$S$-implicaciones probabilisticas*, las *implicaciones de supervivencia* y las *$S$-implicaciones de supervivencia* en los sucesivos artículos [10,11,12,13]. Sin embargo, en todos estos trabajos la única dirección que se ha investigado es la manera de obtener funciones de implicación a partir de cópulas.

En este trabajo queremos investigar la dirección opuesta, que es, estudiar cómo construir cópulas a partir de funciones de implicación, invirtiendo los métodos dados en los artículos mencionados anteriormente. Es bien conocido, a partir del Teorema de Sklar, que las cópulas conectan la función de distribución conjunta de dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con sus distribuciones marginales unidimensionales. En este sentido una cópula $C$ expresa la dependencia de dichas variables aleatorias. Éste es el interés principal de las cópulas y por esta razón han sido estudiadas desde un punto de vista teórico. En particular, la búsqueda de diferentes métodos de construcción de cópulas con propiedades adecuadas es una constante en esta investigación teórica y es en esta línea en la que se enmarca este trabajo.

El trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 se recuerdan algunos preliminares sobre cópulas y funciones de implicación. Las secciones 3 y 4 están dedicadas a la construcción de cópulas a partir de funciones de implicación borrosas con ejemplos y propiedades, a partir de invertir los métodos usados en las $S$-implicaciones probabilísticas y en las $S$-implicaciones de supervivencia, respectivamente. En la sección 5, se demuestra que las $S$-implicaciones probabilísticas y las $S$-implicaciones de supervivencia son realmente implicaciones materiales derivadas de co-cópulas y de la negación borrosa estándar y a partir de este hecho, se estudian las relaciones de las cópulas generadas en este trabajo con otros métodos de construcción conocidos ya en la literatura. La última sección está dedicada a las conclusiones y al trabajo futuro.

## 2. Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los resultados básicos sobre t-normas, t-conormas y funciones de negación borrosas (para más detalles véase [15]). A continuación recordaremos solo algunos conceptos sobre cópulas y funciones de implicación borrosas con el objetivo de que el trabajo sea lo más autocontenido posible. Para ver más detalles sobre cópulas, véase [18] y para más detalles sobre implicaciones, véase [3,17].

**Definición 1.** ([18]) *Una función* $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *es una* cópula *si satisface:*

- $C(0,x) = C(x,0) = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.
- $C(1,x) = C(x,1) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$.
- $C$ *es 2-creciente, es decir, para todo* $x' \leq x$ *e* $y' \leq y$ *se satisface* $C(x,y') + C(x',y) \leq C(x',y') + C(x,y)$.

A partir de una cópula $C$, por dualidad, se puede obtener una *co-cópula* $D$ mediante $D(x,y) = 1 - C(1-x, 1-y)$ para todo $x, y \in [0,1]$.

**Definición 2.** ([18,15]) *Dada una cópula* $C$*, se pueden obtener otras cópulas mediante las construcciones siguientes:*

1. *la* cópula de supervivencia *es otra cópula* $C^*$ *que viene dada para todo* $x, y \in [0,1]$ *por*
$$C^*(x,y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y).$$
2. *las cópulas siguientes dadas para todo* $x, y \in [0,1]$ *por*
$$C_{0,1}(x,y) = x - C(x, 1-y),$$
$$C_{1,0}(x,y) = y - C(1-x, y).$$

**Definición 3.** ([16]) *Una cópula* $C$ *se dice que es* radialmente simétrica *o* invariante *con respecto a la construcción de la cópula de supervivencia (de forma breve, invariante), si se cumple que* $C^* = C$.

**Definición 4.** ([3,9]) *Una operación binaria* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *es una* función de implicación borrosa*, o una* implicación borrosa*, si satisface:*

**(I1)** $I(x,z) \geq I(y,z)$ *cuando* $x \leq y$*, para todo* $z \in [0,1]$.
**(I2)** $I(x,y) \leq I(x,z)$ *cuando* $y \leq z$*, para todo* $x \in [0,1]$.
**(I3)** $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$.

Remarcar que, de la definición, se deriva que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no quedan determinados. A continuación recordamos dos propiedades que usaremos a lo largo del trabajo.

**Definición 5.** ([3,9]) *Sea* $I$ *una implicación borrosa.*

- *La función* $N_I$ *definida por* $N_I(x) = I(x,0)$ *para todo* $x \in [0,1]$*, se llama la* negación natural *de* $I$ *y es siempre una negación borrosa.*
- *Se dice que* $I$ *satisface el* principio de neutralidad por la izquierda *si* $I(1,y) = y$ *para todo* $y \in [0,1]$.

Existen muchas familias de funciones de implicación borrosas. En primer lugar, una familia que se necesitará en este trabajo es la de las implicaciones materiales derivadas de co-cópulas dadas por

$$I_{D,N_c}(x,y) = D(N_c(x), y) = D(1-x, y), \quad x, y \in [0,1]$$

donde $D$ es una co-cópula y $N_c$ es la negación estándar $N_c(x) = 1 - x$.

Los siguientes dos métodos de construcción de funciones de implicación borrosas a partir de cópulas se han presentado en [10,11,12,13].

**Proposición 1.** ([13]) *Sea $C$ una cópula. La función $\tilde{I}_C : [0,1]^2 \to [0,1]$ dada por*

$$\tilde{I}_C(x,y) = C(x,y) - x + 1 \quad \textit{para todo } x,y \in [0,1]$$

*es una función de implicación, que se le llama $S$-*implicación probabilística *(basada en la cópula $C$).*

**Proposición 2.** ([12]) *Sea $C$ una cópula. La función $\tilde{I}^*_C : [0,1]^2 \to [0,1]$ dada por*

$$\tilde{I}^*_C(x,y) = y + C(1-x, 1-y) \quad \textit{para todo } x,y \in [0,1]$$

*es una función de implicación, que es llamada una $S$-*implicación de supervivencia *(basada en la cópula $C$).*

## 3. Cópulas de $S$-implicaciones probabilísticas

En este trabajo queremos estudiar la construcción de cópulas a partir de funciones de implicación borrosas invirtiendo los métodos utilizados en la construcción de $S$-implicaciones probabilísticas y $S$-implicaciones de supervivencia.

Empezaremos por el caso de $S$-implicaciones probabilísticas definidas por $\tilde{I}_C(x,y) = C(x,y) - x + 1$. Podemos obtener la siguiente definición invirtiendo este método.

**Definición 6.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa. Definimos la* función de $S$-implicación probabilística *(PSI-función) derivada a partir de $I$, $C_I^{PSI}$, como la función definida por*

$$C_I^{PSI}(x,y) = I(x,y) + x - 1 \quad \textit{para todo} \quad x,y \in [0,1].$$

*Cuando $C_I^{PSI}$ es una cópula, se le llamará una PSI-cópula.*

*Observación 1.* Por construcción, se tiene que $\tilde{I}_{C_I^{PSI}} = I$ y $C^{PSI}_{\tilde{I}_C} = C$ para cualquier cópula $C$ y función de implicación borrosa $I$.

De todas formas, está claro que la función $C_I^{PSI}$ no es siempre una cópula. De hecho, el siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes sobre una función de implicación borrosa $I$ para otener una cópula a través de la PSI-función definida anteriormente.

**Teorema 1.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa y $C_I^{PSI}$ su PSI-función derivada. Entonces $C_I^{PSI}$ es una cópula si y solo si las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

*i) La negación natural de $I$ es $N_c$.*
*ii) $I$ satisface el principio de neutralidad por la izquierda.*
*iii) $I$ es 2-creciente.*

De entre todas las clases de funciones de implicación borrosas queremos estudiar las $(S,N)$-implicaciones dadas por $I(x,y) = S(N(x),y)$, cuando $S$ es una t-conorma y $N$ es una negación borrosa. En este caso, está claro que la condición *ii)* del teorema anterior se satisface en cualquier caso y para satisfacer la condición *i)* debemos tomar como $N$ la negación clásica $N_c$. Entonces, la única condición que debe ser comprobada es el 2-crecimiento.

*Observación 2.* Como cualquier cópula $C$ es continua, está claro que la función de implicación $I$ debe ser también continua para que $C_I^{PSI}$ sea una cópula (nótese que la continuidad de $I$ se desprende de las tres condiciones del teorema 1). En el caso de las $(S,N)$-implicaciones, como $N$ debe ser $N_c$, la t-conorma usada para construir la implicación debe ser continua.

**Teorema 2.** *Sea $S$ una t-conorma, $I_S$ la $(S,N)$-implicación dada por $I_S(x,y) = S(1-x,y)$ para todo $x,y \in [0,1]$, y $C_{I_S}^{PSI}$ la PSI-función derivada de $I_S$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* *$C_{I_S}^{PSI}$ es una cópula.*
*ii)* *$S$ es 2-decreciente, es decir, $S(x_1,y_1) - S(x_1,y_2) - S(x_2,y_1) + S(x_2,y_2) \leq 0$ para todo $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.*
*iii)* *$S$ satisface la propiedad de Lipschitz con constante 1, es decir, $S(x_2,y) - S(x_1,y) \leq x_2 - x_1$ para todos $x_1,x_2,y \in [0,1]$ tales que $x_1 \leq x_2$.*

A partir del teorema anterior, se puede derivar el siguiente corolario que caracteriza todas las $(S,N)$-implicaciones tales que la PSI-función derivada a partir de ellas es una cópula.

**Corolario 1.** *Sea $S$ una t-conorma, $N$ una negación borrosa, $I$ la correspondiente $(S,N)$-implicación y $C_I^{PSI}$ la PSI-función derivada de $I$. Entonces $C_I^{PSI}$ es una cópula si y solo si $N = N_c$ y $S$ es una co-cópula, esto es, una de las siguientes t-conormas: el máximo, una t-conorma arquimediana con generador aditivo convexo o una suma ordinal de t-conormas arquimedianas con generadores aditivos convexos.*

A continuación mostraremos algunos ejemplos ilustrativos.

*Ejemplo 1.* **i)** En [13] quedó demostrado que la implicación de Łukasiewicz (que es la $(S,N)$-implicación obtenida a partir de $N_c$ y la t-conorma de Łukasiewicz) se obtiene a partir de la cópula mínimo $M$. Recíprocamente, es fácil ver que $C_I^{PSI}$ es la cópula $M$ cuando se toma como base la implicación de Łukasiewicz.

**ii)** De manera similar, la implicación de Reichenbach (que es la $(S,N)$-implicación obtenida a partir de $N_c$ y la t-conorma suma probabilística) se puede obtener a partir de la cópula producto $\Pi$. Recíprocamente, es fácil ver que $C_I^{PSI}$ es la cópula $\Pi$ cuando se toma como base la implicación de Reichenbach.

**iii)** Finalmente, la implicación de Kleene-Dienes (que es la $(S,N)$-implicación que se obtiene a partir de $N_c$ y la t-conorma máximo) se puede obtener a partir de la cópula de Łukasiewicz $W$. Recíprocamente, se puede comprobar fácilmente que $C_I^{PSI}$ es la cópula $W$ cuando se toma como base la implicación de Kleene-Dienes.

Está claro, a partir del corolario 1, que se pueden obtener cópulas a partir de diferentes $(S, N)$-implicaciones, tomando por ejemplo t-conormas arquimedianas o sumas ordinales de t-conormas arquimedianas de las familias conocidas, como las t-conormas de Schweizer-Sklar, Hamacher, Frank, Yager, Dombi, Sugeno-Weber, Alsina-Sklar o Mayor-Torrens (véase [15]).

Otra familia bien conocida de funciones de implicación es la familia de las implicaciones residuales derivadas de t-normas continuas por la izquierda, llamadas también $R$-implicaciones. De todas formas, a partir de esta familia solo se puede generar una PSI-cópula como demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 3.** *Sea $T$ una t-norma continua por la izquierda, $I_T$ su $R$-implicación y $C_{I_T}^{PSI}$ la PSI-función generada a partir de $I_T$. Entonces $C_{I_T}$ es una cópula si y solo si $T$ es la t-norma de Łukasiewicz. En este caso, $I_T$ es la implicación de Łukasiewicz y $C_{I_T}^{PSI}$ es la cópula $M$.*

A partir de la observación 1 y los resultados anteriores se puede determinar la intersección entre las $S$-implicaciones probabilísticas y las $R$ y $(S, N)$-implicaciones.

**Corolario 2.** *Sea $I$ una $S$-implicación probabilística.*

*i) $I$ es una $(S, N)$-implicación si, y sólo si, $N = N_c$ y $S$ es una de las t-conormas especificadas en el corolario 1.*
*ii) $I$ es una $R$-implicación derivada de una t-norma continua por la izquierda si, y sólo si, $I$ es la implicación de Łukasiewicz.*

## 4. Cópulas de $S$-implicaciones de supervivencia

En esta sección estudiaremos el caso de las $S$-implicaciones de supervivencia definidas, a partir de una cópula $C$, por $I_C^*(x, y) = y + C(1 - x, 1 - y)$ para todo $x, y \in [0, 1]$. Invirtiendo este método de construcción, se obtiene la siguiente definición.

**Definición 7.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa. Definimos la* función de $S$-implicación de supervivencia *(SSI-función) generada a partir de $I$, $C_I^{SSI}$ como*

$$C_I^{SSI}(x, y) = I(1 - x, 1 - y) + y - 1 \quad \textit{para todo} \quad x, y \in [0, 1].$$

*Cuando $C_I^{SSI}$ es una cópula, se le dirá SSI-cópula.*

*Observación 3.* Por construcción nuevamente, se tiene que $I^*_{C_I^{SSI}} = I$ y $C_{I_C^*}^{SSI} = C$ para cualquier cópula $C$ y función de implicación borrosa $I$.

*Ejemplo 2.* Las tres cópulas clásicas se pueden obtener como SSI-cópulas a partir de las mismas funciones de implicación como en el caso de las PSI-cópulas. Es decir, obtenemos la cópula $W$ a partir de la implicación de Kleene-Dienes, la cópula $\Pi$ a partir de la implicación de Reichenbach, y la cópula $M$ a partir de la implicación de Łukasiewicz.

Como en la sección anterior, la función $C_I^{SSI}$ no es siempre una cópula.

**Teorema 4.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa y $C_I^{SSI}$ su SSI-función generada. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $C_I^{SSI}$ *es una cópula.*
*ii) La negación natural de $I$ es $N_c$, $I$ satisface el principio de neutralidad por la izquierda e $I$ es 2-creciente.*
*iii)* $C_I^{PSI}$ *es una cópula.*

Además, la relación entre $C_I^{PSI}$ y $C_I^{SSI}$ es muy estrecha, como demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 5.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa tal que $C_I^{PSI}$ es una cópula. Entonces $C_I^{SSI}$ es también una cópula y las siguientes condiciones son equivalentes:*

*i)* $C_I^{SSI}(x,y) = C_I^{PSI}(y,x)$ *para todo* $x, y \in [0,1]$.
*ii) $I$ satisface contraposición respecto de $N_c$, es decir, $I(x,y) = I(1-y, 1-x)$ para todos $x, y \in [0,1]$.*

A partir del teorema 4, las funciones de implicación borrosas a partir de las que podemos obtener PSI-cópulas y aquellas de las que podemos obtener SSI-cópulas son exactamente las mismas. Entonces, si consideramos $R$-implicaciones sólo se obtiene la cópula $M$ a partir de la implicación de Łukasiewicz (véase el teorema 3). Asimismo, si consideramos las $(S,N)$-implicaciones obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.** *Sea $S$ una t-conorma, $N$ una negación borrosa, $I$ la correspondiente $(S,N)$-implicación y $C_I^{SSI}$ la SSI-función generada a partir de $I$. Entonces $C_I^{SSI}$ es una cópula si y solo si $N = N_c$ y $S$ es una co-cópula.*

*Observación 4.* A partir de los resultados anteriores, se pueden determinar las intersecciones entre las $S$-implicaciones de supervivencia y las $R$ y $(S,N)$-implicaciones obteniendo como resultado las caracterizaciones demostradas en [14].

De un modo similar al realizado en la sección anterior, se pueden obtener familias parametrizadas de cópulas a partir de $(S,N)$-implicaciones con $S$ una t-conorma de las familias conocidas de t-conormas. Nótese que, como las $(S,N)$-implicaciones obtenidas a partir de una t-conorma $S$ y la negación $N_c$ satisfacen siempre contraposición respecto de $N_c$, estas nuevas cópulas coincidirán con las cópulas *simétricas* a las obtenidas en la sección anterior (véase el teorema 5).

A partir del teorema 4, también obtenemos la siguiente caracterización de las cópulas invariantes.

**Teorema 6.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa tal que $C_I^{PSI}$ es una cópula (y entonces también $C_I^{SSI}$ es una cópula). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)* $C_I^{PSI}$ *es una cópula invariante.*
*ii)* $C_I^{PSI} = C_I^{SSI}$.
*iii)* $C_I^{PSI}$ *es conmutativa.*

Aplicando este último resultado al caso de $(S,N)$-implicaciones tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.** *Sea $S$ una t-conorma con la condición de Lipschitz, $N = N_c$ e $I$ la $(S,N)$-implicación correspondiente. Sean $C_I^{PSI}$ y $C_I^{SSI}$ las correspondientes PSI-cópula y la SSI-cópula generadas a partir de $I$. Entonces $C_I^{PSI}$ (o $C_I^{SSI}$) es una cópula invariante si y solo si*

$$S(1-x,y) + x = S(x,1-y) + y \quad \textit{para todos } x,y \in [0,1].$$

Es interesante estudiar la ecuación funcional dada en la proposición anterior para t-conormas continuas. Como primer paso nótese que el conjunto de soluciones incluye, al menos, las tres t-conormas básicas: el máximo, la suma probabilística y la t-conorma de Łukasiewicz. Esto se puede ver directamente o como una consecuencia directa de los ejemplos 1 y 2.

## 5. Relaciones con las implicaciones materiales derivadas de co-cópulas

En esta sección, se analizarán las relaciones entre las familias de implicaciones probabilísticas consideradas en este trabajo con las implicaciones materiales derivadas de co-cópulas. Esto permitirá relacionar algunos de los resultados introducidos en las secciones anteriores con resultados ya conocidos en la literatura.

En primer lugar, notar que las $S$-implicaciones probabilísticas y las $S$-implicaciones de supervivencia introducidas en [12,13] son de hecho funciones de implicación borrosas ya conocidas, perteneciendo a la familia de las implicaciones materiales derivadas de co-cópulas y la negación borrosa $N_c$. Concretamente, dada una cópula $C$, consideremos las cópulas derivadas $C_{0,1}$ y $C_{1,0}$ y las co-cópulas derivadas por dualidad $D_{0,1}$ y $D_{1,0}$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_C(x,y) &= 1 - x + C(x,y) = 1 - C_{0,1}(x,1-y) = D_{0,1}(1-x,y) = I_{D_{0,1},N_c}(x,y),\\
\tilde{I}^*_C(x,y) &= y + C(1-x,1-y) = 1 - C_{1,0}(x,1-y) = D_{1,0}(1-x,y)\\
&= I_{D_{1,0},N_c}(x,y).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, dada una co-cópula $D$, sea $C$ su cópula derivada por dualidad y $C_{0,1}$ y $C_{1,0}$ sus cópulas derivadas, entonces

$$\begin{aligned}
I_{D,N_c}(x,y) &= D(1-x,y) = 1 - C(x,1-y) = 1 - x + C_{0,1}(x,y) = \tilde{I}_{C_{0,1}}(x,y),\\
I_{D,N_c}(x,y) &= D(1-x,y) = 1 - C(x,1-y) = 1 - y + C_{1,0}(1-x,1-y)\\
&= \tilde{I}^*_{C_{1,0}}(x,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las tres familias de implicaciones son en realidad la misma.

A continuación, el siguiente resultado establece una relación entre las funciones de implicación borrosas que satisfacen ciertas propiedades con las cópulas. A partir de esta relación y de los teoremas 1 y 4, se deduce que $C_I^{PSI}$, $C_I^{SSI}$ y $C_I$ son cópulas en los mismos casos y de hecho, son cópulas introducidas ya en la literatura.

**Teorema 7.** *Sea $I$ una función de implicación borrosa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $I$ satisface el principio de neutralidad por la izquierda, es 2-creciente y la negación natural de $I$ es $N_c$.*
*ii) $C_I(x,y) = 1 - I(x, 1-y)$ es una cópula.*
*iii) $C_I^{PSI}$ y $C^{SSI}$ son cópulas y vienen dadas por $C_I^{PSI} = (C_I)_{0,1}$ y $C_I^{SSI} = (C_I)_{1,0}$.*
*iv) $I$ es una implicación material generada a partir de la co-cópula $D(x,y) = I(1-x,y)$ y la negación borrosa $N_c$.*
*v) $I$ es una $S$-implicación probabilística generada a partir de la cópula $C_I^{PSI}$.*
*vi) $I$ es una $S$-implicación de supervivencia generada a partir de la cópula $C_I^{SSI}$.*

*Observación 5.* El apartado i) juntamente con los apartados iv), v) y vi) aportan caracterizaciones de las implicaciones materiales generadas a partir de co-cópulas y la negación borrosa $N_c$, de las $S$-implicaciones probabilísticas y de las $S$-implicaciones de supervivencia, respectivamente. Según nuestro conocimiento, ésta es la primera vez que estas familias de implicaciones son caracterizadas.

## 6. Conclusiones

En base a las definiciones de $S$-implicaciones probabilísticas y $S$-implicaciones de supervivencia introducidas en [12,13], en este trabajo se han presentado dos métodos para construir cópulas a partir de funciones de implicación borrosas. Se han estudiado los casos de $(S,N)$ y $R$-implicaciones, obteniendo familias parametrizadas de cópulas. A continuación, se ha demostrado que las $S$-implicaciones probabilísticas, las $S$-implicaciones de supervivencia y las implicaciones materiales derivadas de co-cópulas y de la negación borrosa $N_c$ son realmente la misma familia de funciones de implicación borrosas. A partir de este hecho, se han caracterizado por primera vez estas familias de implicaciones y se han establecido relaciones entre las cópulas generadas en este trabajo con otros métodos de construcción conocidos ya en la literatura.

## Agradecimientos

Este artículo ha sido subvencionado por el proyecto nacional TIN2013-42795-P y la Red Temática Lógica Difusa y Soft Computing (LODISCO) TIN2014-56381-REDT. Los autores quieren agradecer los comentarios de los revisores en relación a los resultados presentados en la sección 5 de este trabajo.

## Referencias


1. I. Aguiló, J. Suñer, and J. Torrens. A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms. *Information Sciences*, 180(20):3992–4005, 2010.
2. M. Baczyński, P. Grzegorzewski, and W. Niemyska. Laws of contraposition and law of importation for probabilistic implications and probabilistic S-implications. In A. Laurent et al., editor, *Proceedings of IPMU-2014*, volume 442 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 158–167. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
3. M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
4. M. Baczyński and B. Jayaram. (S,N)- and R-implications: A state-of-the-art survey. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1836–1859, 2008.
5. M. Baczyński and B. Jayaram. (U,N)-implications and their characterizations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:2049–2062, 2009.
6. B. De Baets and J. C. Fodor. Residual operators of uninorms. *Soft Computing*, 3:89–100, 1999.
7. A. Dolati, J. F. Sánchez, and M. Úbeda-Flores. A copula-based family of fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:55 – 61, 2013.
8. F. Durante, E. Klement, R. Mesiar, and C. Sempi. Conjunctors and their residual implicators: Characterizations and construction methods. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 4:343–356, 2007.
9. J. C. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
10. P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. In S. Galichet et al., editor, *Proc. of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUSFLAT 2011, Aix-Les-Bains, France*, pages 254–258. Atlantis Press, 2011.
11. P. Grzegorzewski. On the properties of probabilistic implications. In P. Melo-Pinto et al., editor, *Eurofuse 2011*, volume 107 of *Advances in Intelligent and Soft Computing*, pages 67–78. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
12. P. Grzegorzewski. Survival implications. In S. Greco et al., editor, *Advances on Computational Intelligence - 14th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU 2012. Proceedings, Part II*, volume 298 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 335–344. Springer, 2012.
13. P. Grzegorzewski. Probabilistic implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 226:53–66, 2013.
14. P. Helbin and M. Baczyński. Properties of the survival implications and s-implications. In J. M. Alonso et al., editor, *Proc. of the IFSA-EUSFLAT 2015*, pages 807–814. Atlantis Press, 2015.
15. E. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
16. E. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Invariant copulas. *Kybernetika*, 38:275–286, 2002.
17. S. Massanet and J. Torrens. An overview of construction methods of fuzzy implications. In M. Baczyński et al., editor, *Advances in Fuzzy Implication Functions*, volume 300 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 1–30. Springer, 2013.
18. R. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer, New York, EUA, 2006.