RU-implicaciones en procesos de inferencia borrosa

M. Mas, M. Monserrat, J.V. Riera, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens

Universitat de les Illes Balears
Crta. Valldemossa km 7.5, E-07122 Palma
{mmg448,mma112,jvicente.riera,daniel.ruiz,jts224}@uib.es

Resumen Los procesos de inferencia borrosa en el razonamiento aproximado se llevan a cabo habitualmente a través de las reglas del Modus Ponens y del Modus Tollens. En este trabajo se investigan las funciones de implicación borrosa obtenidas por residuación a partir de uninormas, también llamadas RU-implicaciones, que satisfacen estas reglas de inferencia con respecto a t-normas y a negaciones borrosas continuas. Las desigualdades correspondientes a que dan lugar dichas reglas se resuelven para las clases de uninormas más habituales como son las uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, las idempotentes y las representables.

Palabras clave: Funciones de implicación borrosa, implicaciones residuadas, Modus Ponens, Modus Tollens, uninormas

1. Introducción

Las funciones de implicación borrosa son unos de los conectivos lógicos más importantes en la lógica borrosa y el razonamiento aproximado. No solo se usan para modelizar los condicionales borrosos, sino también en los procesos de inferencia a través del Modus Ponens y del Modus Tollens generalizados. Además, las funciones de implicación borrosa son útiles, no solo en muchas aplicaciones derivadas del propio razonamiento aproximado, sino también en muchos otros aspectos como las medidas de inclusión, las ecuaciones relacionales borrosas, la morfología matemática, la computación con palabras, etc. Por este motivo, la investigación sobre funciones de implicación se ha desarrollado de forma intensa en las últimas décadas incluso desde el punto de vista puramente teórico, como demuestran el artículo recopilatorio [15] y los libros [3,4] totalmente dedicados a este tipo de conectivos lógicos y sus aplicaciones.

Una punta de lanza en esta investigación consiste en el estudio de propiedades que habitualmente derivan en la resolución de ecuaciones funcionales (o desigualdades) en las que las incógnitas son funciones de implicación (véase por ejemplo el capítulo 7 del libro [4] y las referencias allí citadas). Dos de estas propiedades adicionales son el *Modus Ponens* y el *Modus Tollens* generalizados. De hecho, los esquemas de inferencia en el razonamiento aproximado se basan en estas propiedades, que se llevan a término a través de la *Regla Composicional* *de Inferencia* (CRI) de Zadeh (véase por ejemplo la sección 8.3 en [4]). De este modo, si I es una función de implicación, T una t-norma y N una negación borrosa, el Modus Ponens con respecto a T y el Modus Tollens con respecto a T y a N se escriben en lógica borrosa como las desigualdades

$$T(x, I(x,y)) \leq y \quad \text{para todos } x, y \in [0,1],$$

$$T(N(y), I(x,y)) \leq N(x) \quad \text{para todos } x, y \in [0,1],$$

respectivamente.

Ambas propiedades han sido estudiadas por diversos autores [2,4,18,19,20], especialmente para R, (S,N) y QL-implicaciones derivadas de t-normas, t-conormas y negaciones. Sin embargo, existen diversas generalizaciones de estos tipos de implicaciones, substituyendo la t-norma y la t-conorma por funciones de agregación más generales (véase por ejemplo [4] y las referencias allí citadas). Una de estas generalizaciones está basada en uninormas, obteniendo las llamadas RU-implicaciones [1,7], (U,N)-implicaciones [5] e incluso QL y D-implicaciones derivadas de uninormas [12].

En esta comunicación se pretende estudiar el Modus Ponens y el Modus Tollens para RU-implicaciones dejando los otros casos para trabajos futuros. Veremos que existen numerosas RU-implicaciones que verifican tanto el Modus Ponens como el Modus Tollens y, en diversos casos cuando la t-norma T y la negación N son continuas, caracterizamos todas las que lo verifican, dedicando especial atención a tres clases concretas de uninormas: uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, idempotentes y representables.

2. Preliminares

Supondremos que el lector conoce la teoría básica de t-normas, t-conormas y negaciones borrosas (todas las notaciones y resultados utilizados en este trabajo se pueden hallar en [9]). Supondremos también conocidos los resultados básicos sobre uninormas [8] así como sus clases más habituales [11], esto es, uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$, uninormas representables y uninormas idempotentes.

Recordaremos en esta sección únicamente algunos resultados sobre implicaciones y uninormas con el objetivo de establecer la notación necesaria que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1 *Una aplicación* $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *se dice que es una* función de implicación borrosa *si es decreciente en la primera variable, creciente en la segunda y verifica* $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$.

Nótese que, a partir de la definición, se deduce que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$, mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no son deducibles de la definición.

Definición 2 *Una* uninorma *es una aplicación* $U : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que existe un elemento* $e \in [0,1]$, *llamado* elemento neutro, *tal que* $U(e,x) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Evidentemente una uninorma con elemento neutro $e = 1$ es una t-norma y una uninorma con elemento neutro $e = 0$ es una t-conorma. Para cualquier otro valor $e \in]0, 1[$ la operación se comporta como una t-norma en $[0, e]^2$, como una t-conorma en $[e, 1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en el conjunto $A(e)$ dado por

$$A(e) = [0, e[\times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e[.$$

Denotaremos de forma habitual una uninorma con elemento neutro e y t-norma y t-conorma subyacentes, T y S respectivamente, por $U \equiv \langle T, e, S\rangle$. Cualquier uninorma verifica que $U(0, 1) \in \{0, 1\}$ y cuando $U(1, 0) = 0$ se dice que la uninorma U es *conjuntiva*, mientras que cuando $U(1, 0) = 1$ se dice que U es *disyuntiva*.

Las clases de uninormas más conocidas y estudiadas son las siguientes:

- Uninormas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y $\mathcal{U}_{\text{máx}}$. Son aquellas cuyos valores en la región $A(e)$ son siempre el mínimo o el máximo, respectivamente. Una uninorma en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e \in]0, 1[$ y operadores subyacentes una t-norma T y una t-conorma S, la denotaremos por $U \equiv \langle T, e, S\rangle_{\text{mín}}$ y, de forma similar, una uninorma en $\mathcal{U}_{\text{máx}}$ la denotaremos por $U \equiv \langle T, e, S\rangle_{\text{máx}}$.
- Uninormas idempotentes. Son aquellas tales que $U(x, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$. Fueron caracterizadas primero en [6] para el caso de tener alguna continuidad lateral y en [10] (véase también [17]) para el caso general. Para toda uninorma idempotente U existe una función decreciente $g : [0, 1] \to [0, 1]$, simétrica respecto a la identidad, con $g(e) = e$ y tal que U viene dada por el mínimo por debajo de la función g y por el máximo por encima de g. Denotaremos una uninorma idempotente U con elemento neutro e y función asociada g por $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ y la clase de uninormas idempotentes por $\mathcal{U}_{\text{ide}}$.
- Uninormas representables. Son aquellas uninormas para las cuales existe una función estrictamente creciente $h : [0, 1] \to [-\infty, +\infty]$ con $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ y $h(1) = +\infty$, llamada generador aditivo, tal que

  $$U(x, y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

  para todo $(x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ y $U(0, 1) = U(1, 0) \in \{0, 1\}$. Denotaremos una uninorma representable U con elemento neutro $e \in]0, 1[$ y generador aditivo h por $U \equiv \langle h, e\rangle_{\text{rep}}$ y la clase de uninormas representables por $\mathcal{U}_{\text{rep}}$. Notemos que en este caso, tanto la t-norma T como la t-conorma S subyacentes, son ambas estrictas.

Por otra parte, existen diversas clases de funciones de implicación derivadas de uninormas. Recordamos aquí el caso de las RU-implicaciones.

Definición 3 *Sea U una uninorma. La* operación residuada *obtenida a partir de U es la operación binaria dada por*

$$I_U(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid U(x, z) \le y\} \text{ para todos } x, y \in [0, 1].$$

Proposición 1 ([7]) *Sean U una uninorma e I_U su operación residuada. Entonces I_U es una implicación si y solo si $U(x, 0) = 0$ para todo $x < 1$. En tal caso, I_U recibe el nombre de RU-*implicación.

Esto incluye todas las uninormas conjuntivas, pero también muchas disyuntivas que pueden encontrarse, por ejemplo, en las clases de las uninormas representables (véase [7]) y las idempotentes (véase [16]). Sin embargo, en el caso de trabajar con uninormas continuas por la izquierda, claramente se obtiene que I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva.

Definición 4 *Sean I una función de implicación, T una t-norma y N una negación. Se dice que I verifica*

i) El Modus Ponens *(MP) con respecto a T, o que I es un T-*condicional *si*

$$T(x, I(x, y)) \leq y \quad \textit{para todos } x, y \in [0, 1]. \tag{1}$$

ii) El Modus Tollens *(MT) con respecto a T y a N si*

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x) \quad \textit{para todos } x, y \in [0, 1]. \tag{2}$$

El siguiente resultado para MP y MT fue dado en [18].

Proposición 2 ([18]) *Sean T una t-norma continua por la izquierda, I_T su implicación residuada, N una negación e I una función de implicación.*

i) I verifica MP con respecto a T si y solo si $I \leq I_T$.
ii) I verifica MT con respecto a T y a N si y solo si $I(x, y) \leq I_T(N(y), N(x))$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

3. Modus Ponens para *RU*-implicaciones

Todas las uninormas U consideradas a lo largo de este trabajo se considerarán tales que $U(x, 0) = 0$ para todo $x < 1$, para asegurar que su correspondiente operación residuada I_U es una *RU*-implicación de acuerdo con la proposición 1.

Proposición 3 *Sean T una t-norma y U una uninorma con elemento neutro $e \in]0, 1[$ y t-norma subyacente T_U. Sea I_U su correspondiente RU-implicación. Los siguientes apartados son equivalentes:*

i) I_U verifica el MP con respecto a T.
ii) I_U y T verifican la inecuación (1) para todos $y < x < e$.
iii) se verifica la desigualdad

$$T\left(x, eI_{T_U}\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right)\right) \leq y$$

para todos x, y tales que $y < x < e$, donde I_{T_U} denota la implicación residuada obtenida a partir de la t-norma T_U.

Este resultado demuestra que la t-conorma subyacente S_U de la uninorma U, así como los valores de U en la región $A(e)$ no son relevantes para que I_U sea un T-condicional. Solo la t-norma T_U subyacente es relevante y solo se necesita comprobar la desigualdad correspondiente a la T-condicionalidad en la región

$$R_e = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y < x < e\}.$$

Así, continuamos nuestro estudio dependiendo de cómo es la t-norma subyacente T_U. Notemos que si $T(e, e) = 0$, la condición iii) de la proposición 3 se verifica trivialmente y entonces, cualquier t-norma T_U (continua o no) funcionará en este caso. A partir de ahora, nos restringiremos al caso en que T_U sea continua y, en particular, a los casos en que $T_U = \text{mín}$ o T_U sea arquimediana.

Proposición 4 *Sea U una uninorma con elemento neutro $e \in]0, 1[$ y cuya t-norma subyacente T_U viene dada por el mínimo. Entonces la RU-implicación I_U es un T-condicional respecto a cualquier t-norma T. En particular, este es el caso para cualquier uninorma idempotente.*

Ejemplo 1 *Sea N una negación fuerte. Un ejemplo importante entre las uninormas idempotentes son aquellas en que la función asociada g coincide con N (véase [16]). En estos casos la correspondiente RU-implicación viene dada por*

$$I_U(x, y) = \begin{cases} \text{mín}(N(x), y) & \textit{si } y < x, \\ \text{máx}(N(x), y) & \textit{si } y \geq x. \end{cases}$$

A partir de la proposición anterior resulta claro que todas estas implicaciones son T-condicionales para cualquier t-norma T.

Veamos ahora el caso en que la t-norma subyacente T_U es arquimediana, primero estricta y después nilpotente.

Proposición 5 *Sea U una uninorma con elemento neutro $e \in]0, 1[$ y cuya t-norma subyacente T_U es estricta. Sean I_U la RU-implicación obtenida a partir de U y T una t-norma continua.*

i) Si I_U es un T-condicional, existe $a \geq e$ tal que T es una suma ordinal de la forma $T = (\langle 0, a, T_a\rangle, \langle a, 1, T_1\rangle)$, donde T_a es arquimediana y T_1 continua.
ii) Sean φ y φ_a los generadores aditivos de T_U y T_a respectivamente. Entonces I_U es un T-condicional si y solo si la función $g : [0, +\infty] \to [\varphi_a(\frac{e}{a}), \varphi_a(0)]$, dada por $g(u) = \varphi_a\left(\frac{e}{a}\varphi^{-1}(u)\right)$, es subaditiva.

Nota 1 *i) Obviamente considerando $a = 1$ en la proposición anterior se obtienen RU-implicaciones que son T-condicionales para t-normas arquimedianas T.*
ii) Notemos que todas las uninormas representables son casos particulares de uninormas con T_U estricta.

Ejemplo 2 *Tomemos por ejemplo la uninorma representable conjuntiva U con elemento neutro $e = \frac{1}{2}$ y generador aditivo $h(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Sabemos que su implicación residual I_U viene dada por*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}, \\ \frac{(1-x)y}{x+y-2xy} & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos $T = T_{\mathbf{P}}$ la t-norma producto, entonces es fácil ver que I_U es un $T_{\mathbf{P}}$-condicional puesto que en este caso la situación corresponde a tomar $a = 1$ y $\varphi_1(x) = -\log(x)$ en la proposición 5. De esta manera, la correspondiente función g viene dada por $g(x) = \log(1 + e^x)$, que es claramente subaditiva.

Proposición 6 *Sea U una uninorma con elemento neutro $e \in]0,1[$ y cuya t-norma subyacente T_U es nilpotente con negación asociada N_U. Sea I_U la RU-implicación obtenida a partir de U y T una t-norma continua.*

i) Si I_U es un T-condicional existe $a \geq e$ tal que T es una suma ordinal de la forma $T = (\langle 0, a, T_a\rangle, \langle a, 1, T_1\rangle)$, donde T_a es nilpotente con negación asociada N_a tal que $eN_U(\frac{x}{e}) \leq aN_a(\frac{x}{a})$ para todo $x \in [0, e]$, y T_1 es una t-norma continua.
ii) Sean φ y φ_a los generadores aditivos de T_U y T_a respectivamente. Entonces I_U es un T-condicional si y solo si la función $g : [0,1] \to [\varphi_a(\frac{e}{a}), 1]$, dada por $g(u) = \varphi_a\left(\frac{e}{a}\varphi^{-1}(u)\right)$, es subaditiva.

Nota 2 *De nuevo notemos que cuando $a = 1$ en la proposición anterior obtenemos RU-implicaciones que son T-condicionales para t-normas nilpotentes T.*

Ejemplo 3 *Tomemos U una uninorma en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e = \frac{1}{2}$, con la t-norma de Łukasiewicz como t-norma subyacente y con cualquier t-conorma subyacente S_U. En este caso I_U es siempre un $T_{\mathbf{L}}$-condicional porque, usando la proposición 6, tenemos $a = 1$ y $\varphi(x) = \varphi_1(x) = 1 - x$, por lo que $g(x) = \frac{x+1}{2}$, claramente subaditiva.*

4. Modus Tollens para *RU*-implicaciones

En esta sección, fijada una t-norma continua T y una negación borrosa (continua, estricta, fuerte) N, queremos investigar qué tipo de *RU*-implicaciones satisfacen el Modus Tollens con respecto a T y a N, de forma similar a como se ha hecho para el Modus Ponens con respecto a T, en la sección anterior. Existen muchas diferencias entre dichas propiedades, y la primera de ellas está en el uso de una función de negación borrosa N. Mientras que en el MP la negación N no aparece, en el caso del MT es muy importante, como se puede ver en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4 i) *Consideremos N la negación mínima que viene dada por la expresión $N(x) = N_{lt}(x) = 0$ para todo $x > 0$. En este caso, es fácil ver que una*

implicación borrosa I verifica MT con respecto a la t-norma T y a la negación mínima N_{lt} si y solo si la negación natural de I, dada por $N_I(x) = I(x, 0)$, es la propia N_{lt}. Nótese que las RU-implicaciones construidas a partir de uninormas de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con t-norma subyacente el mínimo o una t-norma estricta, o aquellas construidas a partir de uninormas idempotentes verifican esta propiedad.
ii) *Supongamos ahora que N es la negación máxima, que como es sabido viene dada por la expresión $N(x) = N_{gt}(x) = 1$ para todo $x < 1$. En este caso, una implicación borrosa I verifica MT con respecto a una t-norma T y a la negación N_{gt} si y solo si $I(1, y) = 0$ para todo $y < 1$. Destaquemos que las RU-implicaciones construidas a partir de uninormas representables o de uninormas idempotentes con $g(1) = 0$ verifican esta propiedad.*

Sin embargo la negación N suele tomarse continua y a partir de ahora así la consideraremos, por lo que tendrá un punto fijo denotado habitualmente por $s \in]0, 1[$. Respecto a las tres clases de uninormas usadas para considerar *RU*-implicaciones, recordemos que todas ellas verifican $U(1, y) \in \{y, 1\}$ para todo $y \in [0, 1]$. Teniendo en cuenta este hecho, podemos dar el siguiente resultado general.

Proposición 7 *Sean T una t-norma, N una negación borrosa continua y U una uninorma tal que $U(1, y) = y$ para todo $y < \alpha$, $U(1, y) = 1$ para todo $y > \alpha$, con $\alpha \in]0, 1[$. Si I_U verifica el MT con respecto a T y a N, entonces*

(i) *$T(N(y), y) = 0$ para todo $y \leq \alpha$.*
(ii) *Si T es una t-norma continua entonces T debe ser nilpotente con generador aditivo normalizado $t : [0, 1] \to [0, 1]$ y negación asociada N_T (cuya expresión es $N_T(x) = t^{-1}(1 - t(x))$) tal que $N(y) \leq N_T(y)$ para todo $y \leq \alpha$.*

Veamos los casos de las tres clases de uninormas consideradas en los preliminares. Cuando $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ es una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro $e \in]0, 1[$ se verifica $U(1, y) = y$ para todo $y \leq e$ y por tanto la proposición 7 se aplica para $\alpha = e$. De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Proposición 8 *Sean T una t-norma continua, N una negación borrosa y $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ una uninorma de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ con $e \in]0, 1[$. Si $T(N(y), y) = 0$ para todo $y \leq e$ entonces I_U verifica el MT con respecto a T y a N para todo $y < x$ tal que $x \geq e$.*

La proposición anterior demuestra que para una uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ el MT solo puede fallar para valores $y < x \leq e$. En particular, la correspondiente t-conorma S_U de la uninorma U de $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ no es relevante para que I_U verifique el MT con respecto a T y a N. Solo la correspondiente t-norma T_U es relevante y la desigualdad (2) solo depende del elemento neutro e y la correspondiente t-norma T_U. En este sentido, podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 9 *Sean T una t-norma, $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle_{\text{mín}}$ una uninorma con $e \in]0, 1[$ y N una negación borrosa continua con punto fijo s tal que $T(N(y), y) = 0$ para todo $y \leq e$.*

i) *Si* $e \leq s$ *entonces* I_U *verifica siempre el MT con respecto a* T *y a* N.
ii) *Si* $T_U = \text{mín}$ *entoces* I_U *verifica siempre el MT con respecto a* T *y a* N.
iii) *Si* $s < e$ *entonces* I_U *verifica el MT con respecto a* T *y a* N *si y solo si*

$$eI_{T_U}\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) \leq I_T(N(y), N(x)) \quad \textit{para todos} \quad y < x \leq e.$$

Ejemplo 5 *Consideremos la t-norma de Łukasiewicz* $T_{\mathbf{L}}$ *y la negación clásica* $N(x) = N_c(x) = 1 - x$ *para todo* $x \in [0,1]$. *Entonces las siguientes RU-implicaciones verifican el MT con respecto a* $T_{\mathbf{L}}$ *y a* N_c*:*

- I_U *construida a partir de cualquier uninorma de* $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ *con elemento neutro* $e \leq 1/2$, *se deduce a partir de* (i) *del teorema 9.*
- I_U *construida a partir de cualquier uninorma de* $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ *con elemento neutro* $e > 1/2$ *tal que* $T_U(x,y) = \text{mín}(x,y)$ *para todo* $x, y \in [\frac{1}{2e}, 1]$, *se deduce a partir de* (iii) *del teorema 9.*

En el caso que $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ sea una uninorma idempotente con elemento neutro $e \in]0,1[$, se ha de verificar $g(0) = 1$ para poder asegurar que I_U es una implicación borrosa (véase proposición 1). Si además $g(1) = \alpha > 0$ entonces $U(1, y) = y$ para todo $y < \alpha$ y la proposición 7 es válida. Mientras que si $g(1) = 0$ entonces $U(1, y) = 1$ para todo $y > 0$. Además, para esta clase de uninormas tenemos el siguiente resultado:

Teorema 10 *Sean* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *una uninorma idempotente con elemento neutro* $e \in]0,1[$, N *una negación borrosa continua y* T *una t-norma. Entonces* I_U *verifica el MT con respecto a* T *y a* N *si y solo si*

$$\text{mín}(T(N(y), y), T(N(y), g(x)) \leq N(x) \quad \textit{para todos} \quad y < x. \tag{3}$$

Ejemplo 6 *A partir del resultado anterior podemos obtener algunos casos generales de RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes que satisfacen el MT de la siguiente forma.*

i) *Sea* T *una t-norma nilpotente con negación asociada* N_T *y sea* N *una negación borrosa continua tal que* $N \leq N_T$. *Entonces* I_U *verifica el MT con respecto a* T *y a* N *para cada uninorma idempotente* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$.
ii) *Sea* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *una uninorma idempotente y* N *una negación borrosa continua tal que* $g \leq N$ *(en particular, se verifica* $g(1) = 0$*). Entonces* I_U *verifica el MT con respecto a cualquier t-norma* T *y a* N. *Notemos que este caso incluye las implicaciones dadas en el ejemplo 1.*

Cuando N es una negación estricta podemos dar una caracterización de las *RU*-implicaciones que satisfacen el MT con respecto a cualquier t-norma y negación estricta N de la siguiente manera.

Proposición 11 *Sean* $U \equiv \langle g, e\rangle_{\text{ide}}$ *una uninorma idempotente con elemento neutro* $e \in]0,1[$ *y* N *una negación borrosa estricta. Entonces* I_U *verifica el MT con respecto a cualquier t-norma y a* N *si y solo si* $g(x) \leq N(x)$ *para todo* $x \geq e$.

En el caso en el que $U \equiv \langle h, e\rangle_{\text{rep}}$ sea una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$ se tiene $U(1, y) = 1$ para todo $y > 0$ y así la proposición 7 no es aplicable. En consecuencia, la t-norma T considerada para el MT puede ser cualquiera. Estudiamos aquí dos casos principales: $T = \text{mín}$ o T es una t-norma arquimediana continua.

Proposición 12 *Sean $U \equiv \langle h, e\rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$, N una negación borrosa continua y $T = \text{mín}$. Entonces I_U no verifica el MT con respecto a T y a N.*

Proposición 13 *Sean $U \equiv \langle h, e\rangle_{\text{rep}}$ una uninorma representable con elemento neutro $e \in]0,1[$, N una negación borrosa continua y T una t-norma arquimediana continua con generador aditivo $t : [0,1] \to [0,+\infty]$. Entonces*

i) I_U verifica el MT con respecto a T y a N si y solo si

$$h^{-1}(h(y) - h(x)) \le t^{-1}(t(N(x)) - t(N(y))) \quad \textit{para todos} \quad y \le x. \tag{4}$$

ii) Si T es nilpotente y $N = N_T$, I_U verifica el MT con respecto a T y a N si y solo si φ es subaditiva, donde $\varphi : [0,1] \to [-\infty,+\infty]$ viene dada por $\varphi(x) = h(t^{-1}(x))$ para todo $x \in [0,1]$.

Ejemplo 7 *Consideremos la t-norma de Lukasiewicz $T_{\mathbf{L}}$ y su negación asociada $N_c(x) = 1 - x$. Sea U la uninorma representable considerada en el ejemplo 2. En este caso, tenemos $\varphi(x) = h(1-x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$, que es claramente subaditiva. Aplicando la proposición anterior obtenemos que I_U verifica el MT con respecto a $T_{\mathbf{L}}$ y a N_c.*

5. Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se han estudiado las propiedades del Modus Ponens (MP) y del Modus Tollens (MT) con respecto a una t-norma continua T y a una negación borrosa N para implicaciones residuadas construidas a partir de uninormas, también conocidas como RU-implicaciones. A lo largo de este estudio han ido apareciendo nuevas soluciones de ambas propiedades. Además, se han investigado especialmente los casos correspondientes a las clases $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, uninormas idempotentes y uninormas representables, caracterizando las soluciones en estos casos.

Como trabajo futuro, el estudio realizado en esta comunicación podría ser completado considerando otras clases de uninormas conocidas, como las uninormas continuas en el cuadrado abierto unidad $]0,1[^2$, las uninormas localmente internas o aquellas cuyos operadores subyacentes son continuos. Además, tanto el Modus Ponens como el Modus Tollens podrían ser estudiados en un contexto más general cambiando la t-norma T por una uninorma conjuntiva U_c.

Agradecimientos Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto TIN2013-42795-P y por la Red Temática Lógica Difusa y Soft Computing (LODISCO) TIN2014-56381-REDT.

Referencias

1. I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms, *Information Sciences*, Vol. 180(20) (2010) 3992–4005.
2. C. Alsina, E. Trillas, When (S, N)-implications are (T, T_1)-conditional functions?, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 134, 305–310 (2003).
3. M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince-Sola, A. Pradera (Eds.), Advances in Fuzzy Implication Functions, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 300, Springer, Berlin Heidelberg, 2013.
4. M. Baczyński, B. Jayaram, Fuzzy Implications, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 231, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
5. M. Baczyński, B. Jayaram, (U,N)-implications and their characterizations, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 160, 2049–2062 (2009).
6. B. De Baets, Idempotent uninorms, *European J. Oper. Res.*, 118 (1999) 631–642.
7. B. De Baets, J. C. Fodor, Residual operators of uninorms, *Soft Computing*, Vol. 3, 89–100 (1999).
8. J. C. Fodor, R. R. Yager and A. Rybalov, Structure of Uninorms, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, Vol. 5 (1997) 411–427.
9. E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
10. J. Martín, G. Mayor, J. Torrens, On locally internal monotonic operators, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 137 (2003) 27–42.
11. M. Mas, S. Massanet, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, A survey on the existing classes of uninorms, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems.* doi: 10.3233/IFS-151728.
12. M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, Two types of implications derived from uninorms, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158, 2612–2626 (2007).
13. M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, Modus Ponens and Modus Tollens in discrete implications, *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 49, 422–435 (2008).
14. M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, A characterization of (U, N), RU, QL and D-implications derived from uninorms satisfying the law of importation, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 161 (2010) 1369–1387.
15. M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, A survey on fuzzy implication functions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 15(6), 1107–1121 (2007).
16. D. Ruiz and J. Torrens, Residual implications and co-implications from idempotent uninorms, *Kybernetika*, Vol. 40 (2004) 21–38.
17. D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets, J. Fodor, Some remarks on the characterization of idempotent uninorms, in: E. Hüllermeier, R. Kruse, F. Hoffmann (Eds.), *Computational Intelligence for Knowledge-Based Systems Design*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 6178, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 425–434.
18. E. Trillas, C. Alsina, A. Pradera, On MPT-implication functions for fuzzy logic, *Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A. Matemáticas (RACSAM)*, Vol 98(1), 259–271 (2004).
19. E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo, A. Pradera, On contra-symmetry and MPT-conditionality in fuzzy logic, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol 20, 313–326 (2005).
20. E. Trillas, C. Campo, S. Cubillo, When QM-operators are implication functions and conditional fuzzy relations, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol 15, 647–655 (2000).