

Segmentación Borrosa de Imágenes basada en un Algoritmo de Segmentación Jerárquica

Carely Guada¹, Daniel Gómez², J. Tinguaro Rodríguez¹, Javier Yáñez¹, and Javier Montero³

¹ Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España
28040

² Facultad de Estudios Estadísticos, Universidad Complutense de Madrid, España
28040

³ Instituto IGEO-UCM(CSIC-UCM), Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid, España 28040

Abstract. El propósito de este trabajo es presentar una forma de cómo obtener una segmentación borrosa de imágenes a través de un algoritmo de segmentación jerárquica de imágenes. En primer lugar, para alcanzar este objetivo, se definen dos maneras de segmentar una imagen representada por una red, a través de nodos y mediante aristas. Posteriormente, se extiende la segmentación basada en aristas en un contexto borroso y así proponer una definición y visualización de la segmentación borrosa de imágenes. Luego, se presenta un algoritmo de segmentación jerárquica. Finalmente, se muestran los resultados experimentales obtenidos.

1 Introducción

Alrededor de 1970, la segmentación de imágenes tuvo su auge como un tópico de investigación avanzado. En la visión por ordenador, dicha técnica consiste en un proceso que divide una imagen en múltiples segmentos, esto con el fin de simplificar o modificar la representación de la misma para que sea más significativa y fácil de analizar [2]. Actualmente, existen muchas aplicaciones de segmentación de imágenes, pueden ser muy útiles para un sistema de visión de montaje de automóviles guiado, para detectar células cancerígenas en imágenes médicas, para la identificación de un aeropuerto a partir de datos de teledetección, etc. [13].

Los atributos más básicos para la segmentación son la intensidad para una imagen monocromática, y los componentes de color para una imagen RGB, además son útiles los bordes de la imagen y la textura. En resumen, las regiones de una imagen segmentada debieran ser uniformes y homogéneas en relación con alguna propiedad como el color, la textura, intensidad, etc. [2, 14].

La segmentación de imágenes puede ser definida como un proceso de partición de los píxeles de una imagen en un conjunto disjunto de regiones, en donde cada uno de estos subconjuntos son homogéneos y que pueden estar delimitados por bordes dependiendo de su visualización.

En general, el objetivo de la segmentación es subdividir una imagen en regiones u objetos no solapados con propiedades similares. En cambio, la segmentación jerárquica, obtiene una secuencia de subdivisiones de una imagen

para un número determinado de particiones en un solo paso, desde una sola partición que contiene un solo objeto hasta n particiones que contienen todos los objetos. De esta manera, el nivel de la subdivisión de interés puede ser dependiente del problema a resolver, esto es, la segmentación se detiene cuando los objetos de interés han sido identificados y aislados. Existen varios algoritmos para la segmentación jerárquica de imágenes como se pueden ver en [1, 8, 12, 17].

No obstante, muchos son los casos en donde las imágenes tratadas pueden tener ruido o tener los bordes de los objetos en la imagen no tan definidos, por ende la segmentación llega a ser más complicada. Para estos casos la segmentación Borrosa de Imágenes es una técnica que puede lidiar con bordes entre regiones que sean imprecisos en general [7]. No obstante, es importante resaltar que muchas técnicas borrosas se han utilizado para afrontar estos ruidos en las imágenes, pero las salidas son nítidas. La salida es nítida, si por ejemplo la segmentación es caracterizada en términos de un conjunto de bordes que separan las regiones de forma binaria, en donde los píxeles negros representan los píxeles de una región y los píxeles blancos representan los píxeles entre dos regiones adyacentes manteniendo una misma intensidad. En cambio, una salida es borrosa si al caracterizar una segmentación por medio de un conjunto de bordes, estos bordes presentan graduaciones en su intensidad, siendo más similar a las segmentaciones realizadas por humanos en donde en esas salidas, el grosor o intensidad de los bordes varían dependiendo de qué tan marcados se perciben los bordes en la imagen original. Por ello, la salida borrosa obtenida mediante una técnica de segmentación borrosa es distinta a las salidas nítidas de las segmentaciones conseguidas con técnicas borrosas. Pocos estudios se han dedicado a la extensión del concepto de segmentación nítida a un contexto borroso [4, 15, 16, 19]. En los últimos años, los sistemas borrosos han atraído un enorme interés. Estos métodos han demostrado ser una herramienta poderosa para el modelado y control de procesos no fácilmente tratables con los enfoques convencionales [6].

En [9, 11] se ha planteado una manera de definir la segmentación borrosa de imágenes como una extensión de la definición clásica de segmentación de imágenes. Esta propuesta se basa en el hecho de que una segmentación nítida puede ser caracterizada por medio de un conjunto de aristas que separan las regiones adyacentes de la segmentación a las que se les puede denominar como *borde borroso* de la imagen. Este concepto de borde borroso o frontera borrosa ha sido introducido en trabajos previos [3, 5, 18].

El objetivo de este trabajo es presentar la segmentación borrosa de imágenes a través de la adaptación del algoritmo de segmentación jerárquica de imágenes *Divide-and-Link* (D & L). El algoritmo D & L es divisivo con una complejidad polinomial, y a su vez con un coste computacional bajo.

2 Representación Computacional de una Imagen

Antes de abordar el objetivo de este trabajo, se debe modelar una imagen digital como un grafo. Formalmente, sea $G = (V, E)$ el grafo de una imagen digital I , donde $V = \{p_{i,j} | 1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N\}$ es el conjunto de píxeles y $E = \{e =$

$\{p_{ij}; p_{i'j'}\} | p_{ij}, p_{i'j'} \in V$ es el conjunto de pares no ordenados de píxeles vecinos. Entonces, existe una arista $e = \{p; p'\} \in E$ si y solo si dos píxeles p y p' son vecinos, en caso contrario, entonces $e = \{p; p'\} \notin E$.

Una topología simple para representar la vecindad de los píxeles, es aquella que considera como píxeles vecinos los cuatro vecinos más próximos; ésta será la que se utilizará en el presente estudio para mayor simplicidad.

La Fig. 1 muestra la topología de la red considerada en este estudio.

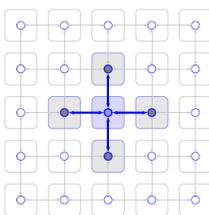


Fig. 1. Topología de cuatro vecinos

Entre las aristas, se asume que cada una posee un peso $e = \{p; p'\} \in E$ que expresa el *Grado de Disimilaridad* ($d_e \geq 0$) entre dos píxeles vecinos (p y p'). Por lo tanto, cuanto mayor sea d_e , mayor disimilaridad existirá entre p y p' . De esta manera, sea $D = \{d_e | e \in E\}$ el conjunto de todas las disimilaridades entre píxeles vecinos. Cabe destacar, que esta medida ($d_e \geq 0$) dependerá del problema y las características de los elementos considerados.

Así, la información contenida en una imagen digital puede ser resumida por una Red $N(I) = \{ G; D \}$.

Ejemplo 1 *Un ejemplo de una red de tamaño 4×5 puede apreciarse en la Fig. 2, con tres colores de píxeles (blanco, azul y rojo), y la disimilaridad entre ellos son 0 si los píxeles vecinos son del mismo color, 0.3, 0.6 y 0.9 entre blanco y azul, rojo y azul, y rojo y blanco, respectivamente.*

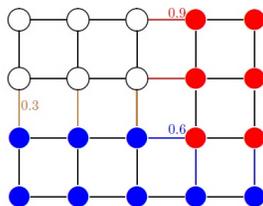


Fig. 2. Ejemplo de la Red de una imagen $N(I)$

3 Segmentación de Imágenes

Desde un punto de vista clásico, la segmentación de imágenes puede ser definida como una partición de un conjunto de píxeles en una familia de regiones. Formalmente, presentamos la siguiente definición:

Definición 1 Dada una red $N(I) = \{ G; D \}$, la familia $S = \{R_1, \dots, R_t\}$, en donde $R_j \subset V$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, es una segmentación de la red de la imagen $N(I)$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. No hay regiones solapadas (i.e., para todo $i \neq j$, $R_i \cap R_j = \emptyset$).
2. Cubrimiento: $\bigcup_{j=1}^t R_j = V$ (todos los píxeles están cubiertos por regiones).
3. Conectividad de todas las regiones: para todo $j \in \{1, \dots, t\}$, el subgrafo $(R_j, E_{|R_j})$ es un grafo conectado.

Una definición alternativa a la anterior, es la que se presenta a continuación:

Definición 2 Sea una red de una imagen $N(I) = \{ G = (V, E); D \}$, un subconjunto $B \subset E$ caracteriza una segmentación de imagen si y solo si el número de componentes conectados del grafo parcial generado por las aristas $E - B$, denotado como $G(E - B) = (V, E - B)$, decrece cuando cualquier arista de B es eliminada.

Esta última definición (Definición 2) posee una biyección con la Definición 1. Es decir existe una biyección entre el conjunto de segmentaciones $S = \{R_1, \dots, R_t\}$ y el conjunto de aristas $B \subset E$ que producen segmentaciones (ver [11]).

Generalmente, una forma muy común de visualizar una segmentación de imágenes, es con una imagen en la que los píxeles que pertenecen a la misma región se colorean en un color que se obtiene como una agregación de los píxeles que pertenecen a esta región. No obstante, otra manera de visualizar una segmentación de una imagen es mediante el contorno de las regiones obtenidas. Así, se puede representar la segmentación de forma binaria, es decir, como una imagen en donde los píxeles coloreados en blanco representan los bordes de las regiones (píxeles localizados entre dos regiones distintas) y los píxeles coloreados en negro son aquellos en que sus vecinos pertenecen a su misma región. Este procedimiento es similar a la representación de la Detección de Bordes, pero la diferencia subyace en que los contornos de la representación propuesta encierran regiones de píxeles homogéneas.

Formalmente, si denotamos por $S(p)$ la región a la que pertenece un píxel p , se propone clasificar el conjunto de píxeles en $V = negro \cup blanco$ como se presenta a continuación:

Definición 3 Dada la red de una imagen $N(I) = \{ G = (V, E); D \}$, y dada una segmentación $S = \{R_1, \dots, R_k\}$, definimos la clase negra y blanca como:

1. negra = $\{p \in V \text{ tal que } S(p) = S(p') \forall e = (p, p') \in E\}$
2. blanca = $\{p \in V \text{ tal que existe } e = (p, p') \in E \text{ with } S(p) \neq S(p')\}$.

en donde $S(p)$ es la región a la cual pertenece el píxel p .

4 Segmentación Borrosa de Imágenes

Ahora bien, con la Definición 2 es posible definir el concepto de segmentación borrosa de imágenes, esto es, a través de la fuzzificación del concepto de segmentación basado en aristas (ver [9, 11] para más detalles).

Definición 4 [9] *Dada una red $N(I) = \{ G = (V, E); D \}$, se dice que el conjunto borroso $\tilde{B} = \{(e, \mu_B(e)), e \in E\}$ genera una segmentación borrosa de imágenes si y solo si para todo $\alpha \in [0, 1]$ el conjunto nítido $B(\alpha) = \{e \in E : \mu_B(e) \geq \alpha\}$ produce una segmentación de imágenes en el sentido de la Definición 2.*

Como se puede apreciar, en la definición anterior la función de pertenencia del conjunto borroso \tilde{B} para una arista dada, representa el grado de separación entre dos píxeles vecinos en el proceso de segmentación. En resumen, se propone introducir disimilaridades borrosas para representar las distancias entre píxeles.

En [11], se plantea que es posible construir una segmentación borrosa mediante la construcción de una segmentación jerárquica de imágenes debido a que existe una biyección entre dichos conceptos.

Dada la red de una imagen $N(I) = \{G = (V, E); D\}$, sea $\mathcal{B} = \{B^0 = E, B^1, \dots, B^K = \emptyset\}$ una segmentación jerárquica de imágenes, y para todo $t \in \{0, 1, \dots, K\}$ sea $\mu^t : E \rightarrow \{0, 1\}$ la función de pertenencia asociada al conjunto de bordes $B^t \subset E$. Entonces, el conjunto borroso \tilde{B} definido como:

$$\mu_B(e) = \sum_{t=0}^K w_t \mu^t(e) \quad \forall e \in E$$

induce una segmentación borrosa de imágenes de $N(I)$ para cualquier secuencia $w = (w_0, w_1, \dots, w_K)$ tal que:

$$w_t \geq 0 \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \sum_{t=0}^K w_t = 1$$

En la sección anterior se estableció mediante un grafo valuado cómo representar una imagen basada en una relación entre píxeles y un grado de disimilaridad. Entonces, para visualizar una segmentación borrosa se propone introducir incertidumbre borrosa y grado borroso de disimilaridad entre píxeles. La cuestión está en clasificar los píxeles en *Clase borrosa blanca* sobre el conjunto de nodos, y en *Clase borrosa negra* como negación de la *Clase borrosa blanca*.

Sea \tilde{B} una segmentación borrosa de imágenes, con función de pertenencia $\mu_B : E \rightarrow [0, 1]$, se puede construir de forma natural las funciones de pertenencia μ_{blanca} y μ_{negra} como sigue:

Definición 5 *Dada una red de imagen $N(I) = \{ G = (V, E); D \}$ y dada una segmentación borrosa de imagen \tilde{B} con función de pertenencia $\mu_B : E \rightarrow [0, 1]$, definimos las clases borrosas blancas y negras de la siguiente manera:*

1. $\mu_{blanca}(p) = MAX\{\mu_B(e), \text{para todo } e = (p, q) \in E\} \forall p \in V.$
2. $\mu_{negra}(p) = N(\mu_{blanca}(P)) = 1 - \mu_{blanca}(P) \forall p \in V.$

Remark 1. Nótese que en la definición anterior, el grado de pertenencia de un píxel dado p a la clase borrosa blanca, es el resultado de la agregación de los valores de $\{\mu_{\tilde{B}}(p, q_i), i = 1, \dots, 4\}$, donde q_1, \dots, q_4 son los vecinos del píxel p . En general, el operador de agregación $\phi : [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$ utilizado debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. ϕ es simétrica.
2. $\phi(x_1, \dots, x_4) = 0$ si y solo si $x_i = 0, \forall i = 1, \dots, 4$ (i.e., un píxel que está siempre en la misma región que sus vecinos, debería tener de grado cero de pertenencia a la clase frontera).
3. $\phi(x_1, \dots, x_4) = 1$ si y solo si existe $i \in \{1, \dots, 4\}$ con $x_i = 1$ (i.e., un píxel que está siempre en el borde debido a que tiene un píxel adyacente en una región diferente, debe tener grado uno de pertenencia a la clase frontera).

Cabe destacar que se ha utilizado el operador de agregación MAX para visualizar, pero otra función de agregación puede ser considerada.

5 Algoritmo Divide and Link en Segmentación Jerárquica de Imágenes

El Algoritmo Divide and Link (D&L) es un algoritmo de agrupamiento jerárquico de una red propuesto en [10] dentro del contexto de problema de detección de comunidades. Este algoritmo consiste en un proceso divisivo, el cual comienza con un único cluster y luego produce una sucesión de particiones que termina con una partición trivial en la cual hay tantos grupos como nodos en la red [10].

En esta sección, adaptamos dicho algoritmo al contexto de procesamiento de imágenes, específicamente para la segmentación jerárquica de imágenes. En primer lugar, expondremos las siguientes definiciones.

5.1 Coloreado de Grafos

Una coloración de grafos induce a una partición de un grafo. Una coloración binaria de una red $N(I)$ sigue un esquema de propagación en cada componente conexa desde los píxeles coloreados hasta los píxeles adyacentes, finalizando una vez que todos los píxeles hayan sido coloreados. Dado $i \in V$ un nodo coloreado de forma binaria (i.e. $col(i) \in \{0, 1\}$), el color que se asigna a un nodo vecino $j \in V$ dependerá de la medida de disimilitud de $e = \{i, j\} \in E$ comparado con un valor establecido α :

$$col(j) = \begin{cases} col(i) & \text{if } d_e < \alpha \quad \forall e \in E \\ 1 - col(i) & \text{if } d_e \geq \alpha \quad \forall e \in E \end{cases}$$

Entonces, considerando una secuencia de umbrales diferentes ($K + 1$ valores) $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K\}$, tales que: $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_K$. Sea $\{G^i = (V, E^i)\}$ con

$i \in \{1, 2, \dots, K\}$ y $E^i = \{e \in E | d_e \geq \alpha_i\}$. Se construye la familia de Bosque Soporte $F^i = (V, T^i)$, para evitar ciclos en el proceso de coloreado, a través de los siguientes pasos:

1. Sea $F^i = (V, T^i)$ el mínimo bosque soporte del grafo parcial $G^i | G^{i+1} = (V, E^i - E^{i+1})$. Siguiendo un algoritmo parecido al de Kruskal, la construcción de F^i se basa en el ordenamiento descendiente de las aristas cuyos pesos están dentro del intervalo $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.
2. Si F^i ya es un bosque soporte de $G^i | G^{i+1}$, se termina el proceso. En caso contrario, aquellas aristas menores que α_i serán ordenadas en orden ascendiente, e iterativamente serán añadidas a T^i (siempre que no formen ciclos). El proceso termina cuando F^i sea un bosque soporte.

5.2 Partición de un Grafo

Sean $G = (V, E)$ un grafo y $P = \{C_1, \dots, C_r\}$ la partición de un grafo. Entonces:

1. $\bigcup_{j=1}^r C_j = V$ (cubrimiento).
2. $C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$ (no solapamiento).
3. $\forall i$ El subgrafo $(C_i, E|_{C_i})$ es conectado para todo i .

Para poder introducir el concepto de partición jerárquica, es necesario definir primero la noción de partición *fina*:

Sea P y Q dos particiones del grafo $G = (V, E)$, se dice que P es más fina que Q ($P \subseteq Q$) si $\forall A \in P$ existe $B \in Q$, tal que $A \subseteq B$.

Entonces, el concepto de partición jerárquica se define de la siguiente manera:

Sean $G = (V, E)$ un grafo y $D = (P^0, P^1, P^2, \dots, P^r)$ una secuencia de particiones, se dice que D es una segmentación jerárquica de G (obtenida de forma divisiva) siempre que:

1. Existan dos particiones triviales: P^0 la partición que contiene todos los píxeles y P^r la partición que contiene todos los píxeles como singuletes (*singleton clusters*), i.e. $P^r = \{\{i\}, i \in V\}$
2. $|P^i| > |P^{i-1}| \quad \forall i = 1, \dots, r$, (i.e. en cada iteración se incrementa el número de grupos).
3. $P^i \subseteq P^{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, r$, i.e. P^i es más fina que P^{i-1} .

5.3 Contracción de nodos

Debido a que algunas redes contienen regiones muy homogéneas, lo más conveniente es que éstas permanezcan compactas para cualquier umbral utilizado en el proceso. Así, se define un umbral de disimilaridad α_r , por lo que los extremos de cualquier arista con un peso inferior a dicho valor serán considerados como un único píxel y las aristas incidentes a este nuevo píxel, son aquellas que eran incidentes a los píxeles de la arista inicial. De este modo, los píxeles de estas aristas no podrán ser separados en el proceso de segmentación jerárquica.

Sea $E(\alpha_\tau) = \{e_{ab} \in E \mid d_{ab} \leq \alpha_\tau\}$ el conjunto de aristas con distancias menores que este valor.

Entonces, cualquier componente conectado del grafo parcial $G(\alpha_\tau) = (V, E(\alpha_\tau))$ es fusionado en una nueva arista.

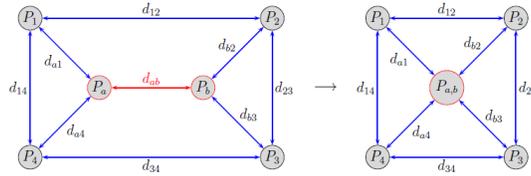


Fig. 3. Contracción de nodos: $d_{ab} \leq \alpha_\tau$

5.4 Algoritmo General

El proceso del algoritmo D&L utilizado para obtener una segmentación borrosa de imágenes consiste en los siguientes pasos:

1. Se calculan los pesos de división y de enlace para cada arista.
2. Las aristas del grafo parcial G^t se disponen secuencialmente según los pesos calculados en el paso anterior.
3. De acuerdo a la disposición anterior y con la ayuda de un algoritmo similar al Kruskal (considerando el orden establecido de las aristas y sin que formen ciclos), se construye un árbol soporte $F^t \subset G^t$.
4. La partición P^t se construye mediante un procedimiento binario, el cual es aplicado sobre F^t .
5. El nuevo conjunto de aristas E^{t+1} se define a partir de E^t , a través de la eliminación de las aristas que unen los distintos grupos de P^t .
6. Se repiten los pasos 1-5 siempre que $E^{t+1} \neq \emptyset$.

6 Resultados Computacionales

A continuación, se ilustrarán los resultados computacionales de una segmentación jerárquica realizada con el algoritmo D&L sobre una imagen en escala de grises (valores entre $[0, 255]$). Como medida de disimilaridad entre los píxeles se consideró la Distancia Euclídea entre las intensidades de los píxeles.

En la Fig. 4 se aprecia la imagen original, y una secuencia de segmentaciones jerárquicas para cinco umbrales predefinidos ($\alpha_1 = 70, \alpha_2 = 45, \alpha_3 = 35, \alpha_4 = 20, \alpha_5 = 15$).

La Fig. 5 muestra la agregación de las segmentaciones mostradas en la Fig. 4 para construir así, una segmentación borrosa de imagen.

Como se puede apreciar en la Fig. 5, se observa que la salida muestra distintas intensidades de grises en los bordes de las segmentaciones de la imagen.

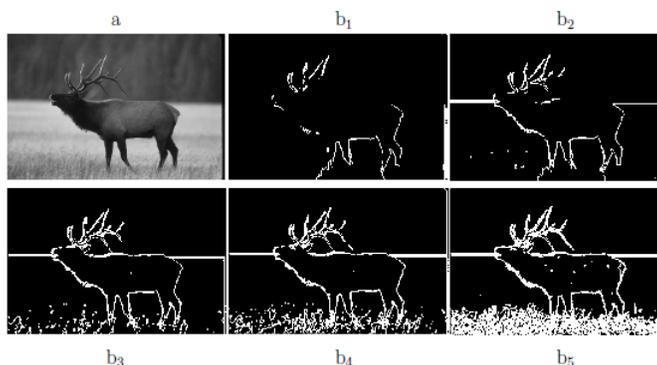


Fig. 4. Segmentación jerárquica con el algoritmo D & L. (a): imagen original, (b1),..., (b5) resultados usando la segmentación jerárquica D & L



Fig. 5. Segmentación borrosa

De esta manera, se obtiene una salida borrosa y no una nítida como en algunas investigaciones, que por medio de técnicas borrosas obtienen salidas nítidas similares a los resultados obtenidos con técnicas clásicas.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente apoyada por el Gobierno de España, subvención TIN2012-32482, y por el Gobierno de la Comunidad de Madrid, subvención S2013/ICE-2845 (CASI-CAM). Agradecimiento a la red LODISCO de Lógica Difusa y Soft Computing, TIN2014-56381-REDT.

References

1. Arbelaez, P., Maire, M., Fowlkes, C., Malik, J.: Contour detection and hierarchical image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33, 5:898–916, (2011)

2. Basavaprasad, B., Ravindra, H.: A Survey on Traditional and Graph Theoretical Techniques for Image Segmentation. *IJCA Proc. on Nat. Conf. on Recent Advances in Information Technology. NCRAIT*, 1:38–46, (2014)
3. Bustince, H., Mohedano, V., Barrenechea, E., Pagola, M.: Definition and construction of fuzzy DI-subsethood measures. *Information Sciences*. 176, 21:3190–3231, (2006)
4. Bloch, I.: Fuzzy connectivity and mathematical morphology. *Pattern Recognition*. 14, 483–488, (1993)
5. Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., Fernández, J.: Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. *Fuzzy Sets and Systems*. 160, 13:1819–1840, (2009)
6. Casillas, J., Cordón, O., Triguero, F. H., Magdalena, L.: Interpretability issues in fuzzy modeling. Springer. 128, (2013)
7. Chamorro-Martínez, J., Sánchez, D., Prados-Suárez, B., Galán-Perales, E., Vila, M. A.: A hierarchical approach to fuzzy segmentation of colour images. In *Fuzzy Systems, 2003. FUZZ'03. The 12th IEEE International Conference*. 2, 966–971, (2003)
8. Cheng, H., Sun, Y.: A hierarchical approach to color image segmentation using homogeneity. *IEEE Trans. on Image Processing*. 9, 12:2071–2082, (2000)
9. Gómez, D., Zarrazola, E., Yáñez, J., Rodríguez, J., Montero, J.: A new concept of fuzzy image segmentation. In *Decision Making and Soft Computing Proceedings of the 11th International FLINS Conference. World Scientific Proceedings Series on Computer Engineering and Information Science. World Scientific Publishing Company, Singapore*. 4, 9:412–417, (2014)
10. Gómez, D., Zarrazola, E., Yáñez, J., Montero, J.: A Divide-and-Link Algorithm for Hierarchical Clustering in Networks. *Information Sciences*. 316, 308–328, (2015)
11. Gómez D., Yáñez, J., Guada, C., Rodríguez, J., Montero, J., Zarrazola, E.: Fuzzy Image Segmentation based upon Hierarchical Clustering. *Knowledge-Based Systems*. DOI: 10.1016/j.knosys.2015.07.017, (2015)
12. Lhermitte, S., Verbesselt, J., Jonckheere, I., Nackaerts, K., Van Aardt, J., Verstraeten, W., Coppin, P.: Hierarchical image segmentation based on similarity of NDVI time series. *Remote Sensing of Environment*. 112, 2:506–521, (2008)
13. Pal, N., Pal, S.: A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition*. 26, 1277–1294, (1993)
14. Pratt, W.: *Digital Image Processing*. Wiley - Interscience. (2001)
15. Rosenfeld, A.: Fuzzy digital topology. *Information Control*. 40, 76–87 (1979)
16. Saha, P., Udupa, J., Odhner, D.: Scale-Based Fuzzy Connected Image Segmentation: Theory, Algorithms, and Validation. *Computer Vision and Image Understanding*. 77, 145–174, (2000)
17. Schroeter, P., Bigün, J.: Hierarchical image segmentation by multi-dimensional clustering and orientation-adaptive boundary refinement. *Pattern Recognition*. 28, 5:695–709, (1995)
18. Senthilkumaran, N., Rajesh, R.: Edge detection techniques for image segmentation a survey of soft computing approaches. *International Journal of Recent Trends in Engineering*. 1, 2:250–254, (2009)
19. Udupa, J., Samarasekera, S.: Fuzzy Connectedness and Object Definition: Theory, Algorithms, and Applications in Image Segmentation. *Graphical Models and Image Processing*. 58, 246–261, (1996)