El Problema del Orden en Conjuntos Atanassov Intuicionistas

L. De Miguel, H. Bustince, J. Fernandez, A. Jurio y D. Paternain

Universidad Publica de Navarra, Campus de Arrosadia s/n 31006, Pamplona
{laura.demiguel,bustince,fcojavier.fernandez,
aranzazu.jurio@unavarra.es,daniel.paternain@unavarra.es }@unavarra.com

Resumen En la lógica difusa se utiliza tanto a nivel teórico como práctico el hecho de que el orden natural en los números reales (y, por lo tanto, en cualquier subconjunto de éste) es un orden total o lineal. Sin embargo, no existe un orden total natural asociado a $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$, por lo que es necesario estudiar la construcción de estos órdenes en la mayoría de las generalizaciones de los conjuntos difusos. En este trabajo nos centramos en conjuntos Atanassov inticionistas, donde se definen una clase de órdenes lineales estudiando su posible construcción a partir de funciones de agregación.

Keywords: Conjuntos Atanassov intuicionistas, órdenes totales, funciones de agregación, toma de decisión.

1. Introducción

Muchas de las herramientas que se utilizan en el campo de la lógica difusa necesitan ordenar distintos valores o elementos. Este es el caso, entre otros, de la integral Choquet, la integral de Sugeno o algunas aplicaciones donde es necesario calcular un ranking entre distintas alternativas (toma de decisión, clasificación, etc.).

Cuando se trabaja con los conjuntos difusos, como sus pertenencias se encuentran en el intervalo $[0, 1]$, se hereda el orden lineal o total de los números reales, pero cuando se trabaja sobre las generalizaciones de los conjuntos difusos, el orden heredado en los nuevos subconjuntos es sólo parcial y no toda pareja de elementos puede ser ordenada. Por ello, debe realizarse un estudio de los posibles órdenes totales en las generalizaciones de los conjuntos difusos. En particular, en este trabajo, se estudia la construcción de órdenes totales en los conjuntos Atanassov intuicionistas.

Dado un elemento x del referencial X, la pertenencia de este elemento a un conjunto Atanassov intuicionista viene dada por una pareja de valores $(\mu(x), \nu(x))$ tales que $\mu(x)$ expresa el grado de pertenencia al conjunto y $\nu(x)$ su grado de no pertenencia [1]. Los órdenes totales que se construyan en estos conjuntos deben considerar que dados $x, y \in X$, "x está por debajo y"si su pertenencia es menor y su no pertenencia es mayor (es decir, $\mu(x) \leq \mu(y)$ y $\nu(x) \geq \nu(y)$). Es lo que se denominan órdenes admisibles y en este trabajo se generan por medio de funciones de agregación. Fíjese que en un orden admisible los elementos $(0, 1)$, y $(1, 0)$ son el mínimo y el máximo respectivamente.

La estructura del estudio es la siguiente: en la Sección 2 fijamos la notación y presentamos algunos conceptos necesarios para la comprensión del trabajo. En la Sección 3 se definen los órdenes admisibles en los conjuntos Atanassov intuicionistas dando una construcción utilizando funciones de agregación. En la Sección 4 se presenta un posible ejemplo de donde pueden ser aplicados estos órdenes. Finalmente, se incluyen las conclusiones de este estudio en la Sección 5.

2. Preliminares

Esta sección pretende fijar la notación que se utilizará a lo largo del trabajo e introducir los conceptos más importantes para su compresión.

2.1. Órdenes

La diferencia entre una relación de orden parcial o total resulta crucial en este trabajo. En este apartado introducimos sus definiciones y algunos ejemplos.

Definición 1 *Una relación de orden parcial $\preceq$ sobre P es una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Dado un orden parcial $\preceq$ sobre un conjunto P y dados $x, y \in P$, se dice x e y son comparables si $x \preceq y$ o $y \preceq x$. De forma similar, si ninguna de las relaciones se cumple, se dice que son elementos incomparables. Además,

a) se llama mínimo al elemento 0_P, que cumpla que para todo $x \in P$, $0_P \preceq x$;
b) se llama máximo al elemento 1_P que cumpla que para todo $x \in P$, $x \preceq 1_P$.

Nótese que debido a la propiedad de antisimetría, en caso de existir mínimo y máximo estos son únicos.

Ejemplo 1 *El orden parcial natural $\preceq_2$ en $\mathbb{R}^2$ viene dado por $(a, b) \preceq_2 (c, d)$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq d$.*

Así, $(\mathbb{R}^2, \preceq_2)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Como se ha explicado anteriormente en un orden parcial pueden existir elementos x,$y \in P$ tales que ni $x \preceq y$ ni $y \preceq x$. Si se quiere evitar que esto ocurra, se puede considerar otra clase de órdenes denominados totales o lineales donde ya no existen elementos incomparables.

Definición 2 *Un orden total $\leq$ sobre P es relación binaria que es transitiva, antisimétrica y total. Equivalentemente se puede definir como un orden parcial donde toda pareja de elementos es comparable.*

Ejemplo 2 *Algunos ejemplos de órdenes totales sobre $\mathbb{R}^2$ son los órdenes lexicográficos que vienen dados por:*

- *(Orden lexicográfico-1)* $(a, b) \leq_{lex1} (c, d)$ *si y solo si*
  - $(a < c)$*; o*
  - $(a = c$ *y* $b \leq d)$*;*
- *(Orden lexicográfico-2)* $(a, b) \leq_{lex2} (c, d)$ *si y solo si*
  - $(b < d)$*; o*
  - $(b = d$ *y* $a \leq c)$*.*

2.2. Lógica difusa

En 1965 Zadeh introdujo el concepto de conjunto difuso como una manera de modelar la incertidumbre o la duda.

Definición 3 *[2] Un conjunto difuso* A *sobre un referencial* X *es una función* $A : X \longrightarrow [0, 1]$ *donde* $A(x)$ *se denomina el grado de pertenencia del elemento* x *al conjunto difuso* A*.*

Cuando se trabaja en la lógica difusa es frecuente tener que fusionar la información de distintas fuentes. Una herramienta muy utilizada para este proceso son las funciones de agregación.

Definición 4 *Una función de agregación* $M : [0, 1]^n \to [0, 1]$ *para* $n \geq 2$*, es una función que satisface:*

- $M(0, \ldots, 0) = 0, \quad M(1, \ldots, 1) = 1$*, y*
- *Para todo par de tuplas* $(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $(y_1, \ldots, y_n)$ *tales que* $x_i \leq y_i$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, entonces* $M(x_1, \ldots, x_n) \leq M(y_1, \ldots, y_n)$*;*
  esto es, M *es creciente con respecto al orden parcial natural en* $\mathbb{R}^n$*.*

En particular, las t-normas son un caso particular de funciones de agregación [3,4,5,6].

Definición 5 *Se llama t-norma* $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *a una función simétrica, asociativa, creciente con respecto al orden natural de los números reales y que satisface* $T(x, 1) = x$ *para todo* $x \in [0, 1]$*.*

Aunque los conjuntos difusos resultan una herramienta muy útil para modelar la incertidumbre, dependiendo de la naturaleza del problema, pueden no ser suficiente. Para estos casos existen distintas generalizaciones de los conjuntos difusos, véase [7]. En este trabajo centramos nuestra atención en conjuntos Atanassov intuicionistas.

Definición 6 *[1] Un conjunto Atanassov intuicionista* $\tilde{A}$ *sobre un referencial* X *es una función* $\tilde{A} : X \longrightarrow [0, 1]^2$ *donde* $\tilde{A}(x) = (\mu(x), \nu(x))$ *tales que* $\mu(x)$ *expresa el grado de pertenencia al conjunto,* $\nu(x)$ *expresa el grado de no pertenencia al conjunto y satisfacen que* $\mu(x) + \nu(x) \leq 1$*.*

Se llama par intuicionista al par $(\mu(x), \nu(x))$ *y* $\mathcal{L}([0, 1])$ *al conjunto de todos los posibles pares intucionistas, es decir,*

$$\mathcal{L}([0, 1]) = \{(a, b) \mid a, b \in [0, 1] \text{ y } a + b \leq 1\}.$$

En [1], junto con la definición de los conjuntos Atanassov intuicionistas, se introdujo un orden parcial para estos conjuntos.

Definición 7 *Sean $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ dos conjuntos Atanassov intuicionistas. De acuerdo al orden dado por Atanassov [1]*

$$\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2 \text{ si y solo si para todo } x \in X, \mu_{\tilde{A}_1}(x) \leq \mu_{\tilde{A}_2}(x) \text{ y } \nu_{\tilde{A}_1}(x) \geq \nu_{\tilde{A}_2}(x)\,.$$

Nótese que este orden consiste en aplicar, para cada elemento del referencial el orden parcial $\preceq_{\mathcal{L}}$en $\mathcal{L}([0,1])$ dado por

$$(a,b) \preceq_{\mathcal{L}} (c,d) \text{ si y solo si } a \leq c \text{ y } b \geq d. \tag{1}$$

Además, los pares $(0,1)$ y $(1,0)$ son el mínimo y máximo elemento del conjunto, respectivamente.

Ejemplo 3 *La Figura 1 muestra los pares intuicionistas $x_1 = (0{,}2, 0{,}4)$, $x_2 = (0{,}47, 0{,}13)$, $x_3 = (0{,}15, 0{,}8)$ y $x_4 = (0{,}1, 0{,}15)$. Nótese que para que el par sea Atanassov intuicionista debe estar situado en el triangulo inferior izquierda, ya que son los pares que cumplen $\mu(x) + \nu(x) \leq 1$.*

Según el orden parcial dado por Atanassov, $x_3 \preceq_{\mathcal{L}} x_1 \preceq_{\mathcal{L}} x_2$.

Así, dado un par intuicionista Atanassov, otro par es menor que él si está colocado a la izquierda y por encima de él mientras que los mayores están a la derecha y por debajo. Esto significa que dado el par intuicionista x_1, todos los pares colocados en la parte sombreada en verde son menores que x_1, mientras que los situados en la zona sombreada en rojo son mayores que x_1.

El par x_4 no está en ninguna de las zonas sombreadas. Esto significa que no es comparable con x_1. Tampoco x_3 y x_4 son comparables. Sin embargo $x_4 \preceq_{\mathcal{L}} x_2$.

3. Órdenes admisibles para conjuntos Atanassov intuicionistas

En [8] se introdujo una familia de órdenes lineales para conjuntos intervalo-valorados difusos, así como una contrucción de estos órdenes utilizando funciones de agregación. En esta sección se realiza un estudio similar para conjuntos Atanassov intuicionistas.

Definición 8 *Un orden $\leq$ es un orden admisible sobre $\mathcal{L}([0,1])$ si es total y refina el orden $\preceq_{\mathcal{L}}$, es decir, un orden total que cumple que para todo par $(a,b),(c,d) \in \mathcal{L}([0,1])$ tales que $(a,b) \preceq_{\mathcal{L}} (c,d)$ entonces $(a,b) \leq (c,d)$ en el orden lineal.*

Proposición 1 *Sean M_1, M_2 dos funciones de agregación $M_i : [0,1]^2 \to [0,1]$ para $i \in \{1,2\}$ tales que para todo par de elementos $(a,b),(c,d) \in \mathcal{L}([0,1])$ las igualdades $M_1(a,b) = M_1(c,d)$ y $M_2(a,b) = M_2(c,d)$ se dan simultáneamente si y solo si $a = c$ y $b = d$.*

Sea $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2)$, entonces la relación de orden dada por $(a,b) \leq_{\boldsymbol{M}} (c,d)$ si y solo si

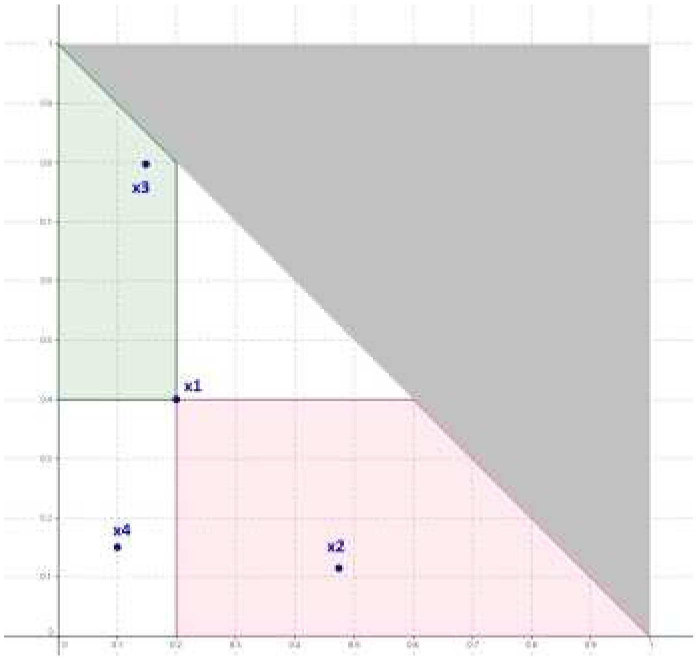

Figura 1. Orden parcial Atanassov

i) $M_1(a, 1-b) < M_1(c, 1-d)$; *o*
ii) $M_1(a, 1-b) = M_1(c, 1-d)$ *y* $M_2(a, 1-b) < M_2(c, 1-d)$

es un orden admisible en $\mathcal{L}([0,1])$.

Demostración. El orden $\leq_{\mathbf{M}}$ es total ya que debido a la condición impuesta a las agregaciones si el par intuicionista no es el mismo, al menos una de las funciones de agregación devuelve un valor distinto. Además, refina $\preceq_{\mathcal{L}}$ ya que si $(a,b) \preceq_{\mathcal{L}} (c,d)$ entonces $a \leq c$ y $b \geq d$ y, por lo tanto, $a \leq c$ y $1-b \leq 1-d$. Por la monotonía de las funciones de agregación se tiene que $M_i(a, 1-b) \leq M_i(c, 1-d)$ para $i \in \{1,2\}$ y, por lo tanto $(a,b) \leq_{\mathbf{M}} (c,d)$.

Comentario 1 *En la Proposición 1 se ha considerado la negación fuerte estándar* $N(x) = 1-x$, *pero podrían construirse órdenes admisibles con cualquier función estrictamente decreciente* D *y comparar los valores:* $M_i(a, D(b))$, $M_i(c, D(d))$ *para* $i \in \{1,2\}$.

Ejemplo 4 *Las proyecciones* $\Pi_1(x_1, x_2) = x_1$ *y* $\Pi_2(x_1, x_2) = x_2$, *son dos funciones de agregación que generan un orden admisible en* $\mathcal{L}([0,1])$. *Además puede verse que el orden que generan es distinto si se permuta el orden de estas agregaciones. Para los dos pares intuicionistas* $(0{,}1, 0{,}4)$ *y* $(0{,}3, 0{,}5)$:

- *si* $\boldsymbol{M} = (\Pi_1, \Pi_2)$ *entonces el par* $(0{,}1, 0{,}4) \leq_{\boldsymbol{M}} (0{,}3, 0{,}5)$ *ya que* $0{,}1 < 0{,}3$;

- *mientras que si* $\boldsymbol{M} = (\Pi_2, \Pi_1)$ *entonces el par* $(0{,}3, 0{,}5) \leq_{\boldsymbol{M}} (0{,}1, 0{,}4)$ *ya que* $1 - 0{,}5 = 0{,}5 < 0{,}6 = 1 - 0{,}4$.

La siguiente proposición presenta un conjunto de agregaciones que generan órdenes admisibles en $\mathcal{L}([0,1])$.

Proposición 2 *Dado un parámetro* $\alpha \in [0,1]$, *los operadores Atanassov son funciones de agregación dadas por* $M_\alpha(a,b) = a + \alpha(b-a)$. *Sean* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *con* $\alpha \neq \beta$. *Entonces el orden generado por estas dos agregaciones* $\boldsymbol{M} = (M_\alpha, M_\beta)$ *como en la Proposición 1 es un orden admisible en* $\mathcal{L}([0,1])$.

Demostración. Es un sencillo cálculo ver que las funciones de agregación satisfacen la condición de la Proposicion 1.

Comentario 2 *Nótese que las proyecciones son casos particulares de estas agregaciones para valores* $\alpha = 0$ *y* $\alpha = 1$.

Proposición 3 *Dados* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *con* $\alpha \neq \beta$. *Entonces el orden admisible generado por* $\boldsymbol{M} = (M_\alpha, M_\beta)$ *es siempre distinto que el orden admisible generado por* $\boldsymbol{M}' = (M_\beta, M_\alpha)$.

Demostración. Para demostrar la proposición es suficiente con encontrar dos pares $(a,b), (c,d)$ tales que

$$M_\alpha(a, 1-b) < M_\alpha(c, 1-d) \text{ y } M_\beta(a, 1-b) > M_\beta(c, 1-d). \tag{2}$$

Sean los pares $(0,0)$ y $(\frac{\alpha+\beta}{2}, 1 - \frac{\alpha+\beta}{2})$ entonces

- $M_\alpha(0,1) = \alpha$;
- $M_\alpha(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\alpha+\beta}{2}$;
- $M_\beta(0,1) = \beta$;
- $M_\beta(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Como $\alpha \neq \beta$ entonces $\alpha \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta$ o $\beta \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \alpha$, pero en ambos casos se satisface (2).

4. Ejemplo ilustrativo en toma de decisión

En esta sección introducimos un ejemplo de problema de toma de decisión donde los conjuntos considerados son conjuntos Atanassov intuicionistas. Los órdenes admisibles construidos en la Sección 3 nos permiten calcular un ranking entre alternativas y decidir cuál es la mejor alternativa.

Ejemplo 5 *En una página web los usuarios votan por sus canciones preferidas. Así, dadas dos canciones los usuarios pueden votar:*

- *La primera canción es mejor que la segunda.*
- *La primera canción no es mejor que la segunda.*

- *Las dos canciones me gustan por igual.*

Sin embargo, no todos los usuarios realizan todas los votos por lo que no siempre que alguien vota "la canción a es mejor que la b" luego vota "la canción b es peor que la a". Este hecho resulta crucial ya que se obtienen distintos porcentajes para estas valoraciones. Por ejemplo, en la Tabla 1 se consideran los porcentajes de las 4 *canciones más populares. Si nos fijamos el* 39 % *de los usuarios opinan que la canción 1 no es mejor que la 2 (han votado falso) pero el* 73 % *ha votado que la 2 es mejor que la 1.*

Porcentajes	Verdad	Falso	No se sabe
La canción 1 es mejor que la 2	48 %	39 %	13 %
La canción 1 es mejor que la 3	62 %	14 %	24 %
La canción 1 es mejor que la 4	30 %	59 %	11 %
La canción 2 es mejor que la 1	73 %	19 %	8 %
La canción 2 es mejor que la 3	58 %	31 %	11 %
La canción 2 es mejor que la 4	5 %	26 %	69 %
La canción 3 es mejor que la 1	14 %	3 %	56 %
La canción 3 es mejor que la 2	28 %	43 %	49 %
La canción 3 es mejor que la 4	50 %	45 %	5 %
La canción 4 es mejor que la 1	27 %	12 %	61 %
La canción 4 es mejor que la 2	58 %	16 %	26 %
La canción 4 es mejor que la 3	38 %	52 %	10 %

Cuadro 1. Resultados votación

Como no es posible saber la cantidad de usuarios que han realizado todos los votos, se considera el conjunto Atanassov intuicionista cuyo par asociado a "la canción i es mejor que la j" es (tanto por uno de verdadero, tanto por uno de falso), es decir, "la canción 1 *es mejor que la* 2*" tiene asociado el par intucionista* (0,48, 0,39)*.*

El primer paso para la resolución del problema, consiste en agregar los valores obteniendo un par intuicionista que exprese el grado de verdad y falsedad de «la canción i es la mejor con respecto a todas las demás». Para ello se utiliza sucesivamente la t-norma intuicionista $T_{\tilde{A}}((a,b),(c,d)) = (ac, b+d-bd)$ *(vease, por ejemplo [9]) y se fusionan todas las funciones de pertenencia y no pertenencia de las expresiones «la canción i es mejor que la j» donde* $j \in \{1,2,3,4\}\backslash\{i\}$*. Fíjese que como la t-norma es asociativa se pueden fusionar las funciones de pertenencia dos a dos.*

Los resultados pueden verse en el Cuadro 2.

En este caso $x_3 \preceq_{\mathcal{L}} x_i$ para $i \in \{1,2,4\}$ pero x_1, x_2 y x_4 son incomparables. Para poder decidir cual de estas 3 canciones es la mejor se considera el orden admisible generado por $\mathbf{M} = \{M_{1/2}, M_{2/3}\}$. Se tiene que:

$$x_1 \leq_{\mathbf{M}} x_4 \leq_{\mathbf{M}} x_2$$

La canción 1 es la mejor: (0,09, 0,78)
La canción 2 es la mejor: (0,02, 0,58)
La canción 3 es la mejor: (0,02, 0,78)
La canción 4 es la mejor: (0,06, 0,64)

Cuadro 2. Resultados agregación

y por lo tanto la mejor canción según este orden admisible es la 2.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha introducido la clase de órdenes admisibles para conjuntos Atanassov intuicionistas dando un método de construcción utilizando funciones de agregación. Además se ha estudiado como un caso particular los órdenes lineales generados por los operadores de Atanassov y se ha desarrollado un ejemplo de cómo pueden aplicarse en toma de decisión. Como líneas futuras, con esta clase de órdenes totales se pueden definir conceptos tales como los OWA, o las integrales Choquet o de Sugeno en conjuntos Atanassov intuicionitas estudiando la diferencia de estos operadores en función del orden lineal.

Referencias

1. K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1):87–96, 1986.
2. L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.
3. J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. In Theory and Decision Library, 1994.
4. M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, 2009.
5. G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Studies In Fuzziness and Soft Computing, Springer, 2007.
6. T. Calvo, A. Kolesárová, M. Komorníková, and R. Mesiar. Aggregation operators: properties, classes and construction methods. In T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, editors, *Aggregation Operators*, volume 97 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 3–104. Physica-Verlag HD, 2002.
7. H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagras, F. Herrera, and B. De Baets. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, PP(99):1–1, 2015.
8. H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, and R. Mesiar. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 220:69–77, 2013.
9. G. Deschrijver, C. Cornelis, and E.E. Kerre. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 12(1):45–61, Feb 2004.