Nuevas medidas de consenso referenciadas difusas

J. C. R. Alcantud[1], R. de Andrés Calle[1], M. J. Campión[2],
T. González-Arteaga[3], and E. Indurain[2]

[1] BORDA Research Unit, Universidad of Salamanca, E37008 Salamanca, España
{rocioac,jcr@}@usal.es
[2] Universidad Pública de Navarra, E, Pamplona, España
{mjesus.campion,steiner}@unavarra.es
[3] Universidad de Valladolid, E47011 Valladolid, España
teresag@eio.uva.es

Resumen En muchos de los problemas reales de toma de decisiones en grupo no sólo es importante establecer un ranking sobre las alternativas sino que también es importante determinar cuánto consenso aporta la solución obtenida al grupo. Por esta razón, en esta contribución proponemos nuevas metodologías para medir el grado de consenso obtenido en los procesos de toma de decisiones en grupo. Realizaremos nuestro análisis bajo el supuesto de relaciones de preferencias difusas.

Keywords: Preferencias graduales; Medidas de consenso referenciadas; Grado de cohesividad

1. Introducción

Un problema clásico de toma de decisiones en grupo se establece en un contexto donde un grupo de agentes o expertos tienen que tomar una decisión sobre un conjunto de alternativas, opciones o candidatos (véase Figura 1). Las opiniones de los agentes sobre las diferentes alternativas se caracterizan habitualmente por sus propias ideas, principios, conocimientos, etc. y este hecho dificulta el proceso de toma de decisiones y la obtención de una solución colectiva.

Existen muchos condicionantes que influyen sobre la decisión final en los procesos de toma de decisiones en grupo. Dos de estos condicionantes son las opiniones de los agentes o expertos (dominio de expresión, criterios a evaluar, conocimiento previo de los alternativas o candidatos, etc.) y la metodología seguida para obtener la decisión final o colectiva (operadores de agregación, sistema de votación, etc.).

Debido a estos factores, puede ser interesante no sólo conocer la decisión final obtenida tras el proceso de agregación de las opiniones individuales sino conocer cuánto acuerdo con respecto a las preferencias individuales aporta dicha solución colectiva. Este hecho es importante porque nos permite analizar que

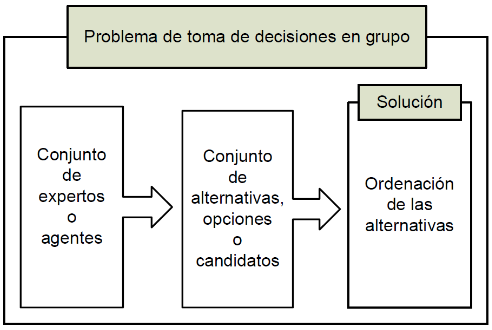

Figura 1: Esquema de la toma de decisiones en grupo

metodologías de toma de decisiones podrían capturar mejor la coherencia dentro del grupo de agentes.

La obtención de consenso en problemas de toma de decisiones en grupo y su medición son áreas de investigación destacadas y activas en la *Teoría de Toma de Decisiones* (véase al respecto [7], [9], [11], [15], [19], [21] y [26], entre otros) y en la *Teoría de la Elección Social* (véase al respecto [1], [2], [3], [4], [6], [10] y [17]).

En esta contribución nos centraremos en las *medidas de consenso referenciadas* (véase [3] y la Figura 2). Estas medidas están definidas originalmente sobre un marco de trabajo donde las preferencias están representadas mediante pre-órdenes completos ordinarios.

Con este trabajo pretendemos ofrecer una mayor versatilidad y flexibilidad de dichas medidas ampliando el marco de trabajo a uno más general que permita graduar las preferencias mediante el uso de relaciones binarias difusas. Así, una vez establecido este nuevo marco de trabajo, definiremos las nuevas *medidas de consenso referenciadas difusas.*

El documento está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 está dedicada a introducir el marco de trabajo tradicional y las medidas de consenso referenciadas asociadas a dicho marco. En la Sección 3 incorporamos nuestra propuesta de marco de trabajo así como las nuevas medidas de consenso referenciadas difusas. Por último, en la Sección 4 damos algunas observaciones finales y planteamos lineas de trabajo para futuras investigaciones.

2. Medidas de consenso referenciadas bajo preferencias ordinarias

En esta Sección presentaremos el marco de trabajo tradicional en la Teoría de Elección Social para la medición del consenso. Además, introduciremos la definición de *medida de consenso referenciada* original de Alcantud, de Andrés Calle y Cascón (véase [3] y [5]).

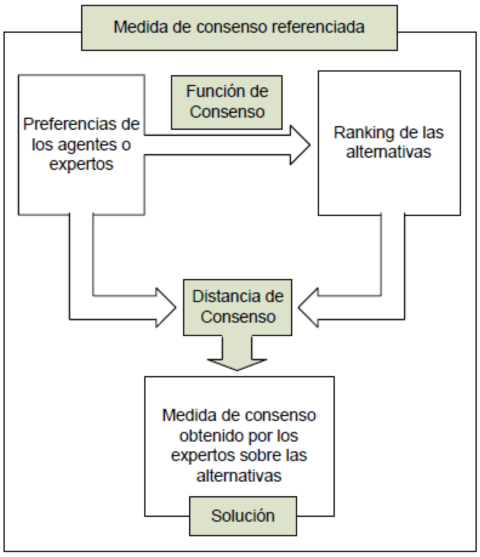

Figura 2: Medida de consenso referenciada

2.1. Marco de trabajo

Supongamos un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ de alternativas, opciones o candidatos[4] y un grupo de agentes o votantes $\mathbf{N} = \{1, \ldots, N\}$.

Sea $W(X)$ el conjunto de pre-órdenes completos ordinarios sobre X. Si $R \in W(X)$ es un orden débil ordinario sobre X entonces mediante la expresión $x_i R_k x_j$ denotamos que el agente k piensa que la alternativa i es al menos tan buena como la j.

Un *perfil* $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_N) \in W(X) \times \overset{N}{\ldots} \times W(X)$ es un vector de pre-órdenes completos ordinarios donde $R_k \in W(X)$ representa las preferencias del individuo k sobre las m alternativas para $k = 1, \ldots, N$.

Diremos que un perfil $\mathbf{R}$ es constante e igual a R si $\mathbf{R} = (R, \overset{N}{\ldots}, R)$.

Cualquier permutación σ de los agentes $\{1, 2, \ldots, N\}$ determina una permutación de $\mathbf{R}$ tal que $\mathbf{R}^\sigma = (R_{\sigma(1)}, \ldots, R_{\sigma(N)})$. De manera análoga, cualquier permutación π sobre las alternativas $\{1, 2, \ldots, m\}$ determina una permutación de cada $R \in W(X)$ por $x_s \, {}^\pi R_k \, x_t \Leftrightarrow x_{\pi^{-1}(s)} \, R_k \, x_{\pi^{-1}(t)}$ para todo s, $t \in \{1, \ldots, N\}$ y $k \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces para cada perfil $\mathbf{R}$ y cada permutación π podemos definir el perfil ${}^\pi\mathbf{R} = ({}^\pi R_1, \ldots, {}^\pi R_N)$.

[4] En ocasiones por simplificar la notación, nos referiremos a la alternativa x_s como alternativa s.

2.2. Medidas de consenso referenciadas

Definición 1 [5] *Una* medida de consenso referenciada *(MCR) es un par* $\mathbf{M} = (\mathcal{C}, \partial)$ *tal que:*

1) $\mathcal{C}$ *es una* función de consenso *[24], es decir, una aplicación*

$$\mathcal{C} : W(X) \times \overset{N}{\ldots} \times W(X) \to W(X),$$

que asocia a cada perfil de pre-ódenes completos ordinarios $\boldsymbol{R}$ *un pre-orden completo ordinario* $\mathcal{C}(\boldsymbol{R})$, *denominado* pre-orden de consenso *asociado a* $\boldsymbol{R}$. *La función de consenso* $\mathcal{C}$ *verifica:*

1.a) $\mathcal{C}(\boldsymbol{R}) = R$ *para cada perfil* $\boldsymbol{R}$ *constante e igual a* R.

1.b) $\mathcal{C}(\boldsymbol{R}^\sigma) = \mathcal{C}(\boldsymbol{R})$ *para cada perfil* $\boldsymbol{R}$ *y* σ *una permutación de los agentes.*
1.c) $\mathcal{C}(^\pi\boldsymbol{R}) =^\pi \mathcal{C}(\boldsymbol{R})$ *para cada perfil* $\boldsymbol{R}$ *y* π *permutación de las alternativas.*

La función de consenso en el contexto de la *Elección Social* puede reemplazarse por una regla de votación que cumpla las propiedades de unanimidad, anonimato y neutralidad, 1.a), 1.b) y 1.c), respectivamente.

2) ∂ *es una* distancia de consenso *entre un perfil* $\boldsymbol{R}$ *y un pre-orden completo ordinario, es decir, una aplicación*

$$\partial : (W(X) \times \overset{N}{\ldots} \times W(X)) \ \times \ W(X) \to [0,1],$$

que asigna un numero real, $\partial(\boldsymbol{R}, R) \in [0,1]$, *a cada par formado por un perfil de pre-órdenes completos ordinarios* $\boldsymbol{R}$, *y un pre-orden completo ordinario* R, *con las siguientes propiedades:*

2.a) $\partial(\boldsymbol{R}, R) = 1$ *si y solo si* $\boldsymbol{R}$ *es constante e igual a* R.

2.b) $\partial(\boldsymbol{R}^\sigma, R) = \partial(\boldsymbol{R}, R)$ *para cada posible permutación* σ *de los agentes.*

2.c) $\partial(^\pi\boldsymbol{R},^\pi R) = \partial(\boldsymbol{R}, R)$ *para cada posible permutación* π *de las alternativas.*

Por consiguiente, asignaremos un valor de consenso $\nabla_{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) = \partial(\mathbf{R}, \mathcal{C}(\mathbf{R}))$ para cada par $\mathbf{M} = (\mathcal{C}, \partial)$ y para cada perfil de pre-órdenes completos ordinarios $\mathbf{R}$ sobre X.

En [3] se proponen varias medidas de consenso referencias utilizando como función de consenso las reglas de votación de Borda y Copeland y como distancia de consenso se utiliza la distancia de Kemeny.

3. Medidas de consenso referenciadas bajo preferencias difusas o graduales

En la Sección anterior el marco de trabajo definido, y por tanto las preferencias individuales de los agentes, únicamente tiene en cuenta qué alternativas son preferidas. Ahora bien, parece natural que los agentes no sólo expresen sus preferencias sobre las distintas alternativas sino que también manifiesten la intensidad con la que se producen estas preferencias. Este hecho se puede incorporar al marco de trabajo inicial si consideramos relaciones de preferencia difusas entre las alternativas. Basándonos en estas premisas en esta Sección rediseñaremos las medidas de consenso introducidas en la Sección 2. Esto dotará de mayor versatilidad y flexibilidad al marco de trabajo y por tanto, a las medidas propuestas.

A continuación introduciremos algunos supuestos necesarios para adaptar las medidas tradicionales expuestas anteriormente al enfoque gradual apuntado, así como la definición de las mismas.

3.1. Algunas definiciones básicas

En primer lugar introduciremos algunos conceptos básicos sobre relaciones binarias y preferencias difusas (véase [20] y [25], entre otros).

Definición 2 *Sea X un conjunto no vacío. Denominamos* relación binaria difusa *$\tilde{R}$ sobre X a un subconjunto difuso del producto cartesiano $X \times X$ caracterizado por su función de pertenencia $\mu_{\tilde{R}} : X \times X \longrightarrow [0,1]$, donde $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$ representa la intesidad con la que el elemento x_1 está relacionado con x_2.*

De aquí en adelante, consideraremos X un conjunto finito $X = \{x_1 \ldots, x_m\}$. Con el objetivo de simplificar la notación, $\mu_{\tilde{R}}(x_i, x_j) = \tilde{r}_{ij} \in [0,1]$ será la intensidad parcial de preferencia con la que un individuo prefiere la alternativa i a la j.

Definición 3 *Una* relación binaria difusa reciproca *sobre $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ es aquella que verifica $\tilde{r}_{ij} + \tilde{r}_{ji} = 1$ y $\tilde{r}_{ii} = 0{,}5$ para cualesquiera $x_i, x_j \in X$.*

Definición 4 *Una* relación de preferencia difusa *es una relación binaria difusa reciproca $\tilde{R}$ sobre $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.*

Con el objetivo de clarificar el significado de las relaciones de preferencias difusas reciprocas supongamos la siguiente situación. Supongamos que un experto/agente tiene comparar dos alternativas x_i y x_j. En un contexto de incertidumbre, el agente no sólo indicará cual de las dos alternativas es preferida sobre la otra sino que además indicará la intensidad de esa preferencia mediante $\tilde{r}_{ij}$. Cuanto mayor sea $\tilde{r}_{ij}$, mayor será la intensidad de preferencia de la alternativa i sobre la j. En particular, el agente preferirá la alternativa j sobre la i si $0 < \tilde{r}_{ij} < 0{,}5$; el agente manifestará indiferencia entre ambas alternativas si $\tilde{r}_{ij} = 0{,}5$; y el agente preferirá la alternativa i sobre la j si $0{,}5 < \tilde{r}_{ij} < 1$.

Definición 5 [23] *Dada una relación de preferencia difusa $\tilde{R}$ sobre X, la relación de preferencia débil ordinaria inducida por $\tilde{R}$, $\succeq$, viene dada por*

$$x_i \succeq x_j \Leftrightarrow \tilde{r}_{ij} \geq 0{,}5,$$

para cada par de alternativas $x_i, x_j \in X$.

3.2. Nuevo marco de trabajo

En este nuevo marco de trabajo consideraremos también un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, sobre el que cada uno de los N agentes muestran sus preferencias mediante una relación binaria difusa $\tilde{R}^k$ sobre X, $k = 1, \ldots, N$. Como se ha indicado anteriormente, $\tilde{r}^k_{ij} = \mu_{\tilde{R}^k}(x_i, x_j) \in [0, 1]$. A partir de la relación de preferencia difusa del agente k sobre las m alternativas podemos construir:

- Su *matriz de intensidades parciales de preferencias*, a la cual denotaremos por $\tilde{\mathcal{R}}^k$

$$\tilde{\mathcal{R}}^k = \begin{pmatrix} \tilde{r}^k_{11} & \tilde{r}^k_{12} & \cdots & \tilde{r}^k_{1m} \\ \tilde{r}^k_{12} & \tilde{r}^k_{22} & \cdots & \tilde{r}^k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{r}^k_{m1} & \tilde{r}^k_{m2} & \cdots & \tilde{r}^k_{mm} \end{pmatrix}$$

  Debemos recordar que las relaciones de preferencia difusas consideradas en esta contribución son reciprocas y por tanto los elementos simétricos de esta matriz respecto de la diagonal principal suman 1.
  Sea $\mathbb{P}_{m\times m}$ el conjunto de todas la matrices $m \times m$ asociadas a relaciones de preferencias difusas.

- Su *vector de intensidades globales de preferencias* sobre las alternativas, a la que denotaremos por $\tilde{R}_k$

$$\tilde{R}_k = V(\tilde{\mathcal{R}}^k) = (\tilde{r}_k(x_1), \ldots, \tilde{r}_k(x_m)) \in [0, 1]^m$$

  De cada vector de intensidades globales de preferencias $\tilde{R}_k$ vinculado a cada agente $k \in \{1, \ldots, N\}$ se induce un pre-oden completo ordinario sobre las alternativas (véase Definición 5).

Un *perfil difuso* $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{\mathcal{R}}^1, \ldots, \tilde{\mathcal{R}}^N) \in \mathbb{P} \times \overset{N}{\cdots} \times \mathbb{P}$ es un vector de matrices de intensidades parciales de preferencia difusas donde $\tilde{\mathcal{R}}^k \in \mathbb{P}_{m\times m}$ representa las intensidades parciales de preferencias del individuo k ($k = 1, \ldots, N$) sobre los $m \times m$ pares de alternativas.

Diremos que un perfil difuso $\tilde{\mathcal{R}}$ es constante e igual a $\tilde{\mathcal{R}}^*$ si $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{\mathcal{R}}^*, \overset{N}{\ldots}, \tilde{\mathcal{R}}^*)$.

Cualquier permutación σ de los agentes $\{1, 2, ..., N\}$ determina una permutación de $\tilde{\mathcal{R}}$ tal que $\tilde{\mathcal{R}}^\sigma = (\tilde{\mathcal{R}}^{\sigma(1)}, \ldots, \tilde{\mathcal{R}}^{\sigma(N)})$. De manera análoga, cualquier permutación π sobre las alternativas $\{1, 2, \ldots, m\}$ determina un perfil difuso ${}^\pi\tilde{\mathcal{R}} = ({}^\pi\tilde{\mathcal{R}}^1, ...,{}^\pi \tilde{\mathcal{R}}^N)$ donde cada ${}^\pi\tilde{\mathcal{R}}^k \in \mathbb{P}_{m\times m}$ es la matriz de intensidades parciales de preferencia del agente k asociada a dicha permutación sobre $\tilde{\mathcal{R}}^k$.

3.3. Vector de intesidades globales de preferencias

Las relaciones de preferencias difusas tienen asociadas dos elementos. En primer lugar, una matriz $\tilde{\mathcal{R}}^k$ cuyos elementos, $\tilde{r}^k_{ij}$, son intensidades parciales de preferencia , esto es, la intensidad de preferencia con la que un agente prefiere una alternativa frente a otra. En segundo lugar, las relaciones de preferencia difusas tienen asociado un vector de intensidades globales de preferencia $\tilde{R}_k$ que recoge para cada agente la intensidad de sus preferencias sobre cada una de las alternativas, $\tilde{r}_k(x_i)$.

Para obtener este vector de preferencias globales para cada agente debemos transformar la matriz $\tilde{\mathcal{R}}^k$ en dicho vector $\tilde{R}_k = V(\tilde{\mathcal{R}}^k)$ para lo cual utilizaremos un operador de agregación.

Actualmente, existen al menos 90 familias diferentes de operadores de agregación que han sido utilizadas para este fin (véase [8], [12], [13], [16], [22] y [27], entre otros). Entre los operadores de agregación más utilizados en la literatura existente se encuentran los OWA (Ordered Weighted Averaging) [27].

En esta contribución proponemos la utilización de estos operadores y calculo de los pesos asociados a los mismos mediante el uso de cuantificadores lingüísticos. En concreto, cuantificadores que reflejen la idea de “mayoría difusa” de Orlovsky [25]. El uso de estos operadores para la agregación de intensidades de preferencias ha sido justificado en la literatura de manera extensa (véase [14], [18], [25], etc).

3.4. Nuevas medidas de consenso referenciadas difusas

A continuación acomodaremos la definición de medidas de consenso referenciadas (véase Definición 1) al nuevo entorno con información gradual.

Definición 6 *Una* medida de consenso referenciada difusa *(MCRD) es un par* $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\partial})$ *tal que:*

1) $\tilde{\mathcal{C}}$ *es una* función de consenso difusa*, es decir, una aplicación*

$$\tilde{\mathcal{C}} : \mathbb{P} \times \overset{N}{\cdots} \times \mathbb{P} \to W(X),$$

que asocia a cada perfil difuso $\tilde{\mathcal{R}}$ *un pre-orden completo ordinario sobre* X $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{R}}) \in W(X)$*, denominado* pre-orden de consenso difuso *asociado a* $\tilde{\mathcal{R}}$*. La función de consenso difusa* $\tilde{\mathcal{C}}$ *verifica:*

1.*a) Para cualquier perfil difuso constante* $\tilde{\mathcal{R}}$ *la función de consenso difusa* $\tilde{\mathcal{C}}$ *asocia a ese perfil difuso el mismo pre-orden completo ordinario inducido por* $\tilde{\mathcal{R}}^*$*.*

1.*b)* $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{R}}^\sigma) = \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{R}})$ *para cada perfil difuso* $\tilde{\mathcal{R}}$ *y* σ *una permutación de los agentes.*

1.*c)* $\tilde{\mathcal{C}}(^\pi\tilde{\mathcal{R}}) =^\pi \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{R}})$ *para cada perfil difuso* $\tilde{\mathcal{R}}$ *y* π *permutación de las alternativas.*

La función de consenso difusa puede reemplazarse por una regla de votación difusa o gradual que cumpla las propiedades de unanimidad, anonimato y neutralidad, 1.a), 1.b) y 1.c), respectivamente, como las definidas en Martínez Panero [23].

2) $\tilde{\partial}$ *es una* distancia de consenso difusa *entre un perfil difuso* $\tilde{\mathcal{R}}$ *y un pre-orden completo ordinario, es decir, una aplicación*

$$\tilde{\partial} : (\mathbb{P} \times \overset{N}{\cdots} \times \mathbb{P}) \ \times \ W(X) \to [0,1],$$

que asigna un numero real, $\tilde{\partial}(\tilde{\mathcal{R}}, R) \in [0,1]$*, a cada par formado por un perfil difuso* $\tilde{\mathcal{R}}$*, y un pre-orden completo* R*, con las siguientes propiedades:*

2.a) $\tilde{\partial}(\tilde{\mathcal{R}}, R) = 1$ *si y solo si* $\tilde{\mathcal{R}}$ *es constante e induce un pre-orden completo ordinario igual a* R*.*

2.b) $\tilde{\partial}(\tilde{\mathcal{R}}^{\sigma}, R) = \tilde{\partial}(\tilde{\mathcal{R}}, R)$ *para cada posible permutación* σ *de los agentes.*

2.c) $\tilde{\partial}(^{\pi}\tilde{\mathcal{R}}, ^{\pi}R) = \tilde{\partial}(\tilde{\mathcal{R}}, R)$ *para cada posible permutación* π *de las alternativas.*

Téngase en cuenta que las preferencias difusas tienen asociadas un vector de intesidades globales de preferencias sobre las alternativas que inducen pre-ordenes completos ordinarios sobre X.

4. Conclusiones y trabajos futuros

En esta contribución han sido presentadas unas nuevas medidas referenciadas difusas para la medición del consenso en problemas de toma de decisiones en grupo bajo un marco de trabajo donde las preferencias son graduales o difusas. Estas nuevas medidas siguen la tradición de las medidas de consenso referenciadas clásicas para pre-órdenes completos ordinarios. La principal ventaja que aportan estas nuevas medidas es la mayor versatilidad y flexibilidad que incorporan a través de la generalización del marco de trabajo.

Este trabajo se encuentra en una fase inicial de desarrollo y por tanto existen múltiples líneas de investigación futuras que pueden considerarse tales como:

- Estudio de las medidas de consenso referenciadas difusas construidas a partir de funciones de consenso difusas como es el caso de las reglas de Borda y Copeland graduales, así como la inclusión de distancias de consenso difusas particulares.
- Una vez paricularizadas algunas de las reglas anteriormente mencionadas, el estudio de sus propiedades y sus caracterizaciones.
- Análisis comparativo entre los resultados obtenidos mediante el uso de las medidas de consenso referenciadas tradicionales y las medidas de consenso referenciadas difusas.

Agradecimientos

Los autores agredecen a los dos evaluadores anónimos las sugerencias realizadas para la mejora de esta contribución. Este trabajo ha sido financiado en parte por el Ministerio de Ciencia e Innovación, Proyectos ECO2012–32178 (R. de Andrés Calle y T. González-Arteaga), CGL2008-06003-C03-03/CLI (R. de Andrés Calle), ECO2012–31933 (J. C. R. Alcantud) y MTM2012-37894-C02-02 y TIN2013-40765-P (M. J. Campión y E. Indurain).

Referencias

1. J. Alcalde and M. Vorsatz. Measuring consensus: Concepts, comparisons, and properties. In E. et al. Herrera-Viedma, editor, *Consensual Processes*, volume 267 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 195–211. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
2. J. Alcalde and M. Vorsatz. Measuring the cohesiveness of preferences: An axiomatic analysis. *Social Choice and Welfare*, 41:965–988, 2013.
3. J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, and J. M. Cascón. Consensus and the act of voting. *Studies in Microeconomics*, 1(1):1–22, 2013.
4. J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, and J. M. Cascón. On measures of cohesiveness under dichotomous opinions: some characterizations of approval consensus measures. *Information Sciences*, 240:45–55, 2013.
5. J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, and J. M. Cascón. A unifying model to measure consensus solutions in a society. *Mathematical and Computer Modelling*, 57:1876–1883, 2013.
6. J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, and T. González-Arteaga. Codifications of complete preorders that are compatible with Mahalanobis consensus measures. In B. De Baets, J. Fodor, and S. Montes, editors, *EUROFUSE 2013 Workshop on Uncertainty and Imprecision Modelling in Decision Making*, pages 19–26. Ediciones de la Universidad de Oviedo, 2013.
7. S. Alonso, F. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Group decision making with incomplete fuzzy linguistic preference relations. *International Journal of Intelligent Systems*, 24:201–222, 2009.
8. G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, Berlin, 2007.
9. G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Pasi. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 27:126–132, 1997.
10. R. Bosch. *Characterizations of Voting Rules and Consensus Measures*. PhD thesis, Tilburg University, 2005.
11. N. Bryson. Group decision-making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content. *Computers and Operational Research*, 1:27–35, 1996.
12. T. Calvo and G. Beliakov. Identification of weights in aggregation operators. In Humberto Bustince, Francisco Herrera, and Javier Montero, editors, *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, volume 220 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 145–162. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

13. F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and S. Alonso. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182(1):383–399, 2007.
14. F. Chiclana, J.M. Tapia García, M.J. del Moral, and E. Herrera-Viedma. A statistical comparative study of different similarity measures of consensus in group decision making. *Information Sciences*, 221:110–123, 2013.
15. Z. Fan and X. Chen. Consensus measures and adjusting inconsistency of linguistic preference relations in group decision making. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3613:130–139, 2005.
16. J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer, The Netherlands, 1994.
17. J. L. García-Lapresta and D. Pérez-Román. Some consensus measures and their applications in group decision making. In D. Ruan, J. Montero, J. Lu, L. Martínez, P. Dhondt, and E. E. Kerre, editors, *Computational Intelligence in Decision and Control*, pages 611–616. World Scientific, Singapore, 2008.
18. E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.
19. E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 32:394–402, 2005.
20. J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105 – 118, 1986.
21. J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. *Consensus under fuzziness.* Kluwer Academic Publishers, 1997.
22. B. Llamazares. An analysis of some functions that generalizes weighted means and OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 28(4):380–393, 2013.
23. M. Martínez-Panero. *Generalizaciones y Extensiones de la regla de votación de Borda*. PhD thesis, University of Valladolid, 2005.
24. F. R. McMorris and R. C. Powers. Consensus rules based on decisive families: The case of hierarchies. *Mathematical Social Sciences*, 57:333–338, 2009.
25. S.A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(3):155 – 167, 1978.
26. Z. Xu. An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making. *Computers and Industrial Engineering*, 56:1369–1374, 2009.
27. R. R. Yager. On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.